



ڈاکٹر ذاکر حسین لائبریری

DR. ZAKIR HUSAIN LIBRARY

JAMIA MILLIA ISLAMIA
JAMIA NAGAR

NEW DELHI

Please examine the book before taking it out. You will be responsible for damages to the book discovered while returning it.

Hall, H. S. & Stevens, F. H.

Send for copy.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ہندسہ مجسمات

انٹریڈیٹ کی جماعتوں کے لئے برائے اسکول جو تیری ہال اینڈ ٹیوٹرز حصہ ششم

مترجمہ

قاضی محمد حسین صاحب ایم اے

پروفیسر ریاضیات عثمانیہ کالج حیدرآباد دکن

۱۳۳۹ھ ۳۳۰ھ ۱۹۲۰ء

مطبعة دارالعلوم دیوبند

یہ کتاب میکین کمپنی کی اجازت سے
جن کو حقوق کا پی ری رائٹ حاصل ہیں
طبع کی گئی ہے۔



مُقَدِّمہ



دنیا میں ہر قوم کی زندگی میں ایک ایسا زمانہ آتا ہے جب کہ اُس کے قوائے ذہنی میں انحطاط کے آثار نمودار ہونے لگتے ہیں، ایجاد و اختراع اور غور و فکر کا مادہ تقریباً مفقود ہو جاتا ہے، تحصیل کی پرواز اور نظر کی جولانی تنگ اور محدود ہو جاتی ہے، علم کا دار و مدار چند رسمی باتوں اور تقلید پر رہ جاتا ہے۔ اُس وقت قوم یا تو بیکار اور مردہ ہو جاتی ہے یا سنبھلنے کے لئے یہ لازم ہوتا ہے کہ وہ دوسری ترقی یافتہ اقوام کا اثر قبول کرے۔ تاریخ عالم کے ہر دور میں اس کی شہادتیں موجود ہیں۔ خود ہمارے دیکھتے دیکھتے جاپان پر یہی گزری اور یہی حالت اب ہندوستان کی ہے جس طرح کوئی شخص دوسرے بنی نوع انسان سے قطع تعلق کر کے تنہا اور الگ تھلک نہیں رہ سکتا اور اگر رہے تو پنپ

نہیں سکتا اسی طرح یہ بھی ممکن نہیں کہ کوئی قوم دیگر اقوام عالم سے بے نیاز ہو کر پھولے پھلے اور ترقی پائے۔ جس طرح ہوا کے جھونکے اور ادنیٰ پرندوں اور کیڑے کورڑوں کے اثر سے وہ مقامات تک ہرے بھرے رہتے ہیں جہاں انسان کی دسترس نہیں اسی طرح انسانوں اور قوموں کے اثر بھی ایک دوسرے تک اڑ کر پہنچتے ہیں۔ جس طرح یونان کا اثر روم اور دیگر اقوام یورپ پر پڑا جس طرح عرب نے عجم کو اور عجم نے عرب کو اپنا فیض پہنچایا جس طرح اسلام نے یورپ میں تاریکی اور جہالت کو مٹا کر علم کی روشنی پہنچائی اسی طرح آج ہم بھی بہت سی باتوں میں مغرب کے محتاج ہیں۔ یہ قانون عالم ہے جو یوں ہی جاری رہا اور جاری رہیگا۔

”دن سے دیا یوں ہی جلتا رہا ہے“

جب کسی قوم کی نوبت یہاں تک پہنچ جاتی ہے اور وہ آگے قدم بڑھانے کی سعی کرتی ہے تو ادبیات کے میدان میں پہلی منزل ترجمہ ہوتی ہے۔ اس لئے کہ جب قوم میں جدت اور ایج نہیں رہی تو ظاہر ہے کہ اس کی تصانیف معمولی ادھوری کم مایہ اور ادنیٰ ہونگی۔ اُس وقت قوم کی بڑی خدمت یہی ہے کہ ترجمہ کے ذریعہ سے دنیا کی اعلیٰ درجہ کی تصانیف اپنی زبان میں لائی جائیں۔ یہی ترجمے خیالات میں تغیر اور معلومات میں اضافہ کریں گے، جمود کو توڑیں گے اور قوم میں ایک نئی حرکت پیدا کریں گے اور پھر آخر یہی ترجمے تصنیف و تالیف

کے جدید اسلوب اور ڈسنگ سمجھائیں گے۔ ایسے وقت میں تھوڑے
تصنیف سے زیادہ قابل قدر زیادہ مفید اور زیادہ فیض رساں
ہوتا ہے۔

اسی اصول کی بنا پر جب عثمانیہ یونیورسٹی کی تجویز پیش
ہوئی تو ہر اکرالٹڈ ہائینس رستم دوراں ارسطوئے زماں
سے سالار آصف جاہ مظفر الممالک نظام الملک نظام الدولہ
نَوَابِ مِیرِ عُمَانِ عَلِیخان بہادر فتح جنگ
جی۔ سی۔ اس۔ آئی۔ جی۔ سی۔ بی۔ ای۔ والی حیدرآباد دکن
خلد اللہ ملکہ و سلطنت نے جن کی علمی قدر دانی اور علمی سرپرستی
اس زمانہ میں اچانے علوم کے حق میں آب حیات کا کام
کر رہی ہے، یہ تقاضائے مصلحت و دور بینی سب سے اول
سرشتہ تالیف و ترجمہ کے قیام کی منظوری عطا فرمائی جو
نہ صرف یونیورسٹی کے لئے نصاب تعلیم کی کتابیں تیار کریں گے
بلکہ ملک میں نشر و اشاعت علوم و فنون کا کام بھی انجام
دیگا۔ اگرچہ اس سے قبل بھی یہ کام ہندوستان کے مختلف
مقامات میں تھوڑا تھوڑا انجام پایا مثلاً فورٹ ولیم کالج کلکتہ میں
زیر نگرانی ڈاکٹر گلکرسٹ، دہلی سوسائٹی میں، انجمن پنجاب میں
زیر نگرانی ڈاکٹر لائٹن و کرنل ہارلینڈ، علی گڑھ سائنٹفک
انسٹیٹیوٹ میں جس کی بنا سرسید احمد خاں مرحوم نے
ڈالی۔ مگر یہ کوششیں سب وقتی اور عارضی تھیں۔ نہ انکے
پاس کافی سرمایہ اور سامان تھا نہ انہیں یہ موقع حاصل تھا

اور نہ انہیں **اَعْلَمَ حَضَرَتٌ وَاَفْلَسٌ** جیسے علم پرورد
فرمانروا کی سرپرستی کا شرف حاصل تھا۔ یہ پہلا وقت ہے کہ
اردو زبان کو علوم و فنون سے مالا مال کرنے کے لئے باقاعدہ
اور مستقل کوشش کی گئی ہے۔ اور یہ پہلا وقت ہے کہ
اردو زبان کو یہ رتبہ ملا ہے کہ وہ اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار
پائی ہے۔ احیائے علوم کے لئے جو کام آگسٹس نے روم میں
خلافت عباسیہ میں ہارون الرشید و مامون الرشید نے ہسپانیہ میں
عبدالرحمن ثالث نے، بکرماجیت و اکبر نے ہندوستان میں
الفرڈ نے انگلستان میں، پیٹر اعظم و کیتھرائٹ نے روس میں
اور مت شی ہٹو نے جاپان میں کیا، وہی فرمانروائے دولت
اَصْفِیَہ نے اس ملک کے لئے کیا۔ **اَعْلَمَ حَضَرَتٌ وَاَفْلَسٌ**
کا یہ کارنامہ ہندوستان کی علمی تاریخ میں ہمیشہ فخر و مباہات
کے ساتھ ذکر کیا جائیگا۔

منجملہ اُن اسباب کے جو قومی ترقی کا موجب ہوتے ہیں ایک
بڑا سبب زبان کی تکمیل ہے۔ جس قدر جو قوم زیادہ ترقی یافتہ
ہے اُسی قدر اُس کی زبان وسیع اور اس میں نازک خیالات
اور علمی مطالب کے ادا کرنے کی زیادہ صلاحیت ہوتی ہے،
اور جس قدر جس قوم کی زبان محدود ہوتی ہے اُسی قدر تنہیب
و شائستگی بلکہ انسانیت میں اس کا درجہ کم ہوتا ہے۔ چنانچہ
وحشی اقوام میں الفاظ کا ذخیرہ بہت ہی کم پایا گیا ہے۔ علمائے
فلسفہ و علم اللسان نے یہ ثابت کیا ہے کہ زبان، خیال اور

خیال، زبان ہے اور ایک مدت کے بعد اس نتیجے پر پہنچے ہیں کہ انسانی دماغ کے صحیح تاریخی ارتقا کا علم، زبان کی تاریخ کے مطالعہ سے حاصل ہو سکتا ہے۔ الفاظ ہمیں سوچنے میں ویسی ہی مدد دیتے ہیں جیسی آنکھیں دیکھنے میں۔ اس لئے زبان کی ترقی درحقیقت عقل کی ترقی ہے۔

علم ادب اسی قدر وسیع ہے جس قدر حیات انسانی۔ اور اس کا اثر زندگی کے ہر شعبہ پر پڑتا ہے۔ وہ نہ صرف انسان کی ذہنی، معاشرتی، سیاسی ترقی میں مدد دیتا، اور نظر میں سمٹ دماغ میں روشنی، دلوں میں حرکت اور خیالات میں تغیر پیدا کرتا ہے بلکہ قوموں کے بنانے میں ایک قوی آلہ ہے۔ قومیت کے لئے ہم خیالی شرط ہے اور ہم خیالی کے لئے ہم زبانی لازم گویا ایک زبانی قومیت کا شیرازہ ہے جو اسے منتشر ہونے سے بچائے رکھتا ہے۔ ایک زمانہ تھا جب کہ مسلمان اقطاع عالم میں پھیلے ہوئے تھے لیکن اُن کے علم ادب اور زبان نے انہیں ہر جگہ ایک کر رکھا تھا۔ اس زمانے میں انگریز ایک دنیا پر چھائے ہوئے ہیں لیکن باوجود بُعد مسافت و اختلاف مالاٹ یک زبانی کی بدولت قومیت کے ایک سلسلے میں منسلک ہیں، زبان میں جادو کا سا اثر ہے اور صرف افراد ہی پر نہیں بلکہ اقوام پر بھی اُس کا وہی تسلط ہے۔

یہی وجہ ہے کہ تعلیم کا صحیح اور فطرتی ذریعہ اپنی ہی زبان ہو سکتی ہے۔ اس امر کو **اعْلَمُ صَدَقَ وَأَقْلَسُ** نے

پہانا اور جامعہ عثمانیہ کی بنیاد ڈالی۔ جامعہ عثمانیہ ہندوستان میں پہلی یونیورسٹی ہے جس میں ابتداء سے انتہا تک ذریعہ تعلیم ایک دیسی زبان ہوگا۔ اور یہ زبان اردو ہوگی۔ ایک ایسے ملک میں جہاں ”بہانت بہانت کی بولیاں“ بولی جاتی ہیں، جہاں ہر صوبہ ایک نیا عالم ہے، صرف اردو ہی ایک عام اور مشترک زبان ہو سکتی ہے۔ یہ اہل ہند کے میل جول سے پیدا ہوئی اور اب بھی یہی اس فوض کو انجام دیگی۔ یہ اس کے خمیر اور وضع و ترکیب میں ہے۔ اس لئے یہی تعلیم اور تبادلہ خیالات کا واسطہ بن سکتی اور قومی زبان کا دعویٰ کر سکتی ہے۔

جب تعلیم کا ذریعہ اردو قرار دیا گیا تو یہ کھلا اعتراض تھا کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کتابوں کا ذخیرہ کہاں ہے اور ساتھ ہی یہ بھی کہا جاتا تھا کہ اردو میں یہ صلاحیت ہی نہیں کہ اس میں علوم و فنون کی اعلیٰ تعلیم ہو سکے۔ یہ صیح ہے کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کافی ذخیرہ نہیں۔ اور اردو ہی پر کیا منحصر ہے، ہندوستان کی کسی زبان میں بھی نہیں۔ یہ طلب و رسد کا عام مسئلہ ہے۔ جب مانگ ہی نہ تھی تو رسد کہاں سے آتی۔ جب ضرورت ہی نہ تھی تو کتابیں کیونکر مینا ہوتیں۔ ہماری اعلیٰ تعلیم غیر زبان میں ہوتی تھی، تو علوم و فنون کا ذخیرہ ہماری زبان میں کہاں سے آتا۔ ضرورت ایجاد کی ماں ہے۔ اب ضرورت محسوس ہوئی ہے تو کتابیں بھی

میتا ہو جائیں گی۔ اسی کمی کو پورا کرنے اور اسی ضرورت کو رفع کرنے کے لئے سررشتہ تالیف و ترجمہ قائم کیا گیا۔ یہ صحیح نہیں ہے کہ اردو زبان میں اس کی صلاحیت نہیں۔ اس کے لئے کسی دلیل و برہان کی ضرورت نہیں۔ سررشتہ تالیف و ترجمہ کا وجود اس کا شافی جواب ہے۔ یہ سرتہ ہی کام کر رہا ہے۔ کتابیں تالیف و ترجمہ ہو رہی ہیں اور چند روز میں عثمانیہ یونیورسٹی کالج کے طالب علموں کے ہاتھوں میں ہونگی اور رفتہ رفتہ عام شائقین علم تک پہنچ جائیں گی۔

لیکن اس میں سب سے کٹھن اور سنگلاخ مرحلہ وضع اصطلاحات کا تھا۔ اس میں بہت کچھ اختلاف اور بحث کی گنجائش ہے۔ اس بارے میں ایک مدت کے تجربہ اور کامل غور و فکر اور مشورہ کے بعد میری رائے قرار پائی ہے کہ تنہا نہ تو ماہر علم صحیح طور سے اصطلاحات وضع کر سکتا ہے اور نہ ماہر لسان۔ ایک کو دوسرے کی ضرورت ہے۔ اور ایک کی کمی دوسرا پورا کرتا ہے۔ اس لئے اس اہم کام کو صحیح طور سے انجام دینے کے لئے یہ ضروری ہے کہ دونوں یک جا جمع کئے جائیں تاکہ وہ ایک دوسرے کے مشورہ اور مدد سے ایسی اصطلاحات بنائیں جو نہ اہل علم کو ناگوار ہوں نہ اہل زبان کو۔ چنانچہ اسی اصول پر ہم نے وضع اصطلاحات کے لئے ایک ایسی مجلس بنائی جس میں دونوں جماعتوں کے اصحاب شریک ہیں۔ علاوہ ان کے

ہم نے اُن اہل علم سے بھی مشورہ کیا جو اس کی خاص اہلیت رکھتے ہیں اور بُعد مسافت کی وجہ سے ہماری مجلس میں شریک نہیں ہو سکتے۔ اس میں شک نہیں کہ بعض الفاظ غیر مانوس معلوم ہوں گے اور اہل زبان انہیں دیکھ کر ناک بہوں پڑھائیں گے۔ لیکن اس سے گریز نہیں۔ ہمیں بعض ایسے علوم سے واسطہ ہے جن کی ہوا تک ہماری زبان کو نہیں لگی۔ ایسی صورت میں سوائے اس کے چارہ نہیں کہ جب ہماری زبان کے موجودہ الفاظ خاص خاص مفہوم کے ادا کرنے سے قاصر ہوں تو ہم جدید الفاظ وضع کریں۔ لیکن اس کے یہ معنی نہیں ہیں کہ ہم نے محض ٹالنے کے لئے زبردستی الفاظ گھڑ کر رکھ دئے ہیں بلکہ جس نہج پر اب تک الفاظ بنتے چلے آئے ہیں اور جن اصول ترکیب و اشتقاق پر اب تک ہماری زبان کاربند رہی ہے، اس کی پوری پابندی ہم نے کی ہے۔ ہم نے اُس وقت تک کسی لفظ کے بنانے کی جرأت نہیں کی جب تک اُسی قسم کی متعدد مثالیں ہمارے پیش نظر نہ رہی ہوں۔ ہماری رائے میں جدید الفاظ کے وضع کرنے کی اس سے بہتر اور صحیح کوئی صورت نہیں۔ اب اگر کوئی لفظ غیر مانوس یا اجنبی معلوم ہو تو اس میں ہمارا قصور نہیں۔ جو زبان زیادہ تر شعر و شاعری اور قصص تک محدود ہو، وہاں ایسا ہونا کچھ تعجب کی بات نہیں۔ جس ملک سے ایجاد و اختراع کا مادہ سلب ہو گیا ہو جہاں لوگ نئی چیزوں کے بنانے اور دیکھنے کے عادی نہ ہوں، وہاں جدید الفاظ کا

غیر مانوس اور اجنبی معلوم ہونا موجب حیرت نہیں۔ الفاظ کی حالت بھی انسانوں کی سی ہے۔ اجنبی شخص بھی رفتہ رفتہ مانوس ہو جاتے ہیں۔ اول اول الفاظ کا بھی یہی حال ہے۔ استعمال آہستہ آہستہ غیر مانوس کو مانوس کر دیتا ہے اور صحت و غیر صحت کا فیصلہ زمانہ کے ہاتھ میں ہوتا ہے۔ ہمارا فرض یہ ہے کہ لفظ تجویز کرتے وقت ہر پہلو پر کامل غور کر لیں، آئندہ چل کر اگر وہ استعمال اور زمانہ کی کسوٹی پر پورا اترتا تو خود ٹکسالی ہو جائیگا اور اپنی جگہ آپ پیدا کر لیگا۔ علاوہ اس کے جو الفاظ پیش کئے گئے ہیں وہ الہامی نہیں کہ جن میں رد و بدل نہ ہو سکے بلکہ فرہنگ اصطلاحات عثمانیہ جو زیر ترتیب ہے پہلے اس کا مسودہ اہل علم کی خدمت میں پیش کیا جائے گا اور جہاں تک ممکن ہو گا اس کی اصلاح میں کوئی دقیقہ فرو گذاشت نہیں کیا جائے گا۔

لیکن ہماری مشکلات صرف اصطلاحات علمیہ تک ہی محدود نہیں ہیں۔ ہمیں ایک ایسی زبان سے ترجمہ کرنا پڑتا ہے جو ہمارے لئے بالکل اجنبی ہے، اس میں اور ہماری زبان میں کسی قسم کا کوئی رشتہ یا تعلق نہیں۔ اس کا طرز بیان، ادائے مطلب کے اسلوب، محاورات وغیرہ بالکل جدا ہیں۔ جو الفاظ اور جملے انگریزی زبان میں بالکل معمولی اور روزمرہ کے استعمال میں آتے ہیں، اُن کا ترجمہ جب ہم اپنی زبان میں کرنے بیٹھتے ہیں تو سخت دشواری پیش آتی ہے۔ ان تمام دشواریوں پر

غالب آنے کے لئے مترجم کو کیسا کچھ خونِ جگر کھانا نہیں پڑا۔ ترجمہ کا کام جیسا کہ عموماً خیال کیا جاتا ہے، کچھ آسان کام نہیں ہے۔ بہت خاک چھانی پڑتی ہے تب کہیں گوہر مقصود ہاتھ آتا ہے۔ اس سرشت کا کام صرف یہی نہ ہو گا اگرچہ یہ اس کا فرض اولین ہے، کہ وہ نصاب تعلیم کی کتابیں تیار کرے، بلکہ اس کے علاوہ وہ ہر علم پر متعدد اور کثرت سے کتابیں تالیف و ترجمہ کرائے گا، تاکہ لوگوں میں علم کا شوق بڑھے، ملک میں روشنی پھیلے، خیالات و قلوب پر اثر پیدا ہو، جمالت کا استیصال ہو۔ جمالت کے معنی اب لاعلمی ہی کے نہیں بلکہ اس میں افلاس، کم ہمتی، تنگ دلی، کوتاہ نظری، بے غیرتی، بد اخلاقی سب کچھ آجاتا ہے۔ جمالت کا مقابلہ کر کے اسے پس پا کرنا سب سے بڑا کام ہے۔ انسانی دماغ کی ترقی علم کی ترقی ہے۔ انسانی ترقی کی تاریخ علم کی اشاعت و ترقی کی تاریخ ہے۔ ابتدائے آفرینش سے اس وقت تک انسان نے جو کچھ کیا ہے، اگر اس پر ایک وسیع نظر ڈالی جائے تو نتیجہ یہ نکلے گا کہ جوں جوں علم میں اضافہ ہوتا گیا، پچھلی غلطیوں کی صحت ہوتی گئی، تاریکی گھٹتی گئی، روشنی بڑھتی گئی، انسان میدانِ ترقی میں قدم آگے بڑھاتا گیا۔ اسی مقدس فرض کے ادا کرنے کے لئے یہ سرشت قائم کیا گیا ہے اور وہ اپنی بساط کے موافق اس کے انہماک دینے میں کوتاہی نہ کرے گا۔

لیکن غلط، تحقیق و جستجو کی کھات میں لگی رہتی ہے۔ ادب ۱

کال ذوق سلیم ہر ایک کو نصیب نہیں ہوتا۔ بڑے بڑے نقاد اور مبصر فاش غلطیاں کر جاتے ہیں۔ لیکن اس سے ان کے کام پر حرف نہیں آتا۔ غلطی ترقی کے مانع نہیں ہے، بلکہ وہ صحت کی طرف رہنمائی کرتی ہے۔ پچھلوں کی بھول چوک آنے والے مسافر کو رستہ بھٹکنے سے بچا دیتی ہے۔ ایک جاپانی ماہر تعلیم (ہیرن کی کوچی) نے اپنے ملک کا تعلیمی حال لکھتے ہوئے اس صحیح کیفیت کا ذکر کیا ہے جو ہونہار اور ترقی کرنے والے افراد اور اقوام پر گزرتی ہے۔

”ہم نے بہت سے تجربے کئے اور بہت سی ناکامیاں اور غلطیاں ہوئیں، لیکن ہم نے ان سے نئے سبق سیکھے اور فائدہ اٹھایا۔ رفتہ رفتہ ہیں اپنے ملک کی تعلیمی ضروریات اور امکانات کا صحیح اور بہتر علم ہوتا گیا اور ایسے تعلیمی طریقے معلوم ہوتے گئے جو چارے اہل وطن کے لئے زیادہ موزوں تھے۔ ابھی بہت سے ایسے مسائل ہیں جو ہیں حل کرنے میں بہت سی ایسی اصلاحیں ہیں جو ہیں عمل میں لانی ہیں، ہم نے اب تک کوشش کی اور ابھی کوشش کر رہے ہیں اور مختلف طریقوں کی برائیاں اور بھلائیاں دریافت کرنے کے درپے ہیں تاکہ اپنے ملک کے فائدے کے لئے اچھی باتوں کو اختیار کریں اور رواج دیں اور برائیوں سے بچیں۔ اس لئے جو حضرات ہمارے کام پر تنقیدی نظر ڈالیں انہیں وقت کی تنگی، کام کا بھوم اور اس کی اہمیت اور ہماری مشکلات پیش نظر رکھنی چاہئیں۔ یہ پہلی سی ہے اور پہلی سی میں کچھ نہ کچھ خامیاں

ضرور رہ جاتی ہیں، لیکن آگے چل کر یہی خامیاں ہماری رہنما بنیں گی اور پختگی اور اصلاح تک پہنچائیں گی۔ یہ نقش اول ہے، نقش ثانی اس سے بہتر ہوگا۔ ضرورت کا احساس علم کا شوق، حقیقت کی لگن، صحت کی نوہ، جدوجہد کی رسائی خود بخود ترقی کے مدارج طے کر لے گی۔

جاپانی بڑے فخر سے یہ کہتے ہیں کہ ہم نے تیس چالیس سال کے عرصے میں وہ کچھ کر دکھایا جس کے انجام دینے میں یورپ کو اتنی ہی صدیاں صرف کرنی پڑیں۔ کیا کوئی دن ایسا آئے گا کہ ہم بھی یہ کہنے کے قابل ہوں گے؟ ہم نے پہلی شرط پوری کر دی ہے یعنی بیجا قیود سے آزاد ہو کر اپنی زبان کو اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار دیا ہے۔ لوگ ابھی ہمارے کام کو تذبذب کی نگاہ سے دیکھ رہے ہیں اور ہماری زبان کی قابلیت کی طرف مشتبہ نظریں ڈال رہے ہیں۔ لیکن وہ دن آنے والا ہے کہ اس ذرے کا بھی ستارہ بن جائے گا، یہ زبان علم و حکمت سے مالا مال ہوگی اور

اَعْلٰی حَضْرَتِ وَاَقْلَسْ کی نظر کیمیا اثر کی بدولت یہ دنیا کی مذہب و شایستہ زبانوں کی ہمسری کا دعوے کرے گی۔ اگرچہ اُس وقت ہماری سعی اور محنت حیرت معلوم ہوگی، مگر یہی شاید غربت صبح وطن کی آمد کی خبر دے رہی ہے، یہی شب بیدار روز روشن کا جلوہ دکھائیں گی، اور یہی مشقت اُس قصر رفیع الشان کی بنیاد ہوگی جو آئندہ تعمیر ہونے والا ہے۔ اس وقت ہمارا کام صبر و استقلال سے میدان صاف کرنا،

داغ بیل ڈالنا اور نیو کھودنا ہے، اور فرماؤ وار شیریں حکمت کی خاطر سنگلاخ پہاڑوں کو کھود کھود کر جوئے علم لانے کی سعی کرتا ہے۔ اور گو ہم نہ ہوں گے مگر ایک زمانہ آئیگا جب کہ اس میں علم و حکمت کے دریا بہیں گے اور ادبیات کی افادہ زمین سرسبز و شاداب نظر آئے گی۔

آخر میں میں سررشتہ کے مترجمین کا شکریہ ادا کرتا ہوں جنہوں نے اپنے فرض کو بڑی مستعدی اور شوق سے انجام دیا۔ نیز میں ارکان مجلس وضع اصطلاحات کا شکر گزار ہوں کہ ان کے مفید مشورے اور تحقیق کی مدد سے یہ مشکل کام بخوبی انجام پا رہا ہے۔ لیکن خصوصیت کے ساتھ یہ سررشتہ جناب مسٹر محمد اکبر حیدری بی۔ اے معتمدِ عدالت و تعلیمات و کوٹوالی و امور عامہ سرکار عالی کا ممنون ہے جنہیں ابتدا سے قیام و انتظام جامعہ عثمانیہ میں خاص انماک رہا ہے۔ اور اگر ان کی توجہ اور امداد ہمارے شریک حال نہ ہوتی تو یہ عظیم الشان کام صورت پذیر نہ ہوتا۔ میں سید راس مسعود صاحب بی۔ اے (آکسن) آئی۔ ای۔ ایس۔ ناظم تعلیمات سرکار عالی کا بھی شکریہ ادا کرتا ہوں کہ ان کی توجہ اور عنایت ہمارے حال پر مبذول رہی اور ضرورت کے وقت ہمیشہ بلا تکلف خوشی کے ساتھ ہمیں مدد دی۔

عبدالحق

ناظم سررشتہ تالیف و ترجمہ (عثمانیہ یونیورسٹی)

ارکان مجلس وضع و تدوین

مولوی مرزا مہدی خاں صاحب گوکب ولیفہ یاب نگار علی (سابق ناظم موم شہری)
 مولوی حمید الدین صاحب بی۔ اے صدر دارالعلوم
 نواب حیدر یار جنگ (مولوی علی حیدر صاحب طباطبائی)
 مولوی حمید الدین صاحب سلیم
 مولوی عبدالحق بی۔ اے ناظم سررشتہ تالیف و ترجمہ

علاوہ ان مستقل ارکان کے ، مترجمین سررشتہ تالیف و ترجمہ نیز
 دوسرے اصحاب سے بلحاظ اُنکے فن کے مشورہ کیا گیا۔ مثلاً
 خان فضل محمد خان صاحب ایم۔ اے ریگر (پرنسپل ٹی ہائی اسکول حیدرآباد)
 مولوی عبد الواسع صاحب (پروفیسر دارالعلوم حیدرآباد)
 پروفیسر عبدالرحمن صاحب بی۔ ایس۔ سی (نظام کالج)
 مرزا محمد ہادی صاحب بی۔ اے (پروفیسر کرپن کالج لکھنؤ)
 مولوی سلیمان صاحب ندوی

سید راس مسعود صاحب بی۔ اے (ناظم تعلیمات حیدرآباد) وغیرہ

فہرست مضامین

ہند محاسبیات

نمبر	مضمون	صفحہ
۱	خطوط و سطوح	
۲	تعریفات ابتدائی اصول دو سطحی زاوے	۱
۳	تعریفات و مسائل مجسم زاوے	۴۳
۴	تعریفات و مسائل حوالہ کے محاور	۴۹
۵	فضائیں کسی نقطہ کے مقام کا تعین مجسم اشکال تعریفات اور ابتدائی مسائل مجسموں کی سطحیں اور حجم مستطیلی مجسم منشور مخروط منقطع پانچ منظم کثیر السطوح	۶۰ ۶۳ ۶۶ ۶۸ ۶۹ ۷۸

صفحہ	مضمون	نمبر
	گروہی مجسمات	۵
۱۰۹	اسطوانہ	
۱۱۰	ایک اسطوانہ کی سطح اور حجم	
۱۱۵	محزوط	۶
۱۱۶	ایک مخروط کی سطح اور حجم	
۱۲۰	مخروط ناقص، منقطع مخروط ناقص	
۱۲۹	کرہ	۷
۱۳۰	اساسی خواص	
۱۳۹	کرہ کی سطح	
۱۴۱	کرہ ناقص، قطعہ کرہ، منطقہ	
۱۴۲	کرہ کا حجم	
۱۴۹	کرہ پر حوالہ کے خط - عرض بلد و طول بلد	
۱۵۲	پہانکوں کی منحنی سطحیں	
۱۵۴	کردی مثلث	
۱۶۷	عددی مشقوں کے جوابات	۸

ہندسہ محکمات

خطوط و سطوح

تعریفات اور ابتدائی اصول

۱۔ اسکول جو میٹری، حصہ اول کی تعریفات کے بموجب
(۱) نقطہ وہ ہندسی مقدار ہے جس کی نہ لمبائی ہو، نہ چوڑائی
اور نہ موٹائی۔ (نقطہ کے طول، عرض، عمق تینوں نہیں ہوتے)
(۲) خط کی صرف لمبائی ہوتی ہے، لیکن چوڑائی اور
موٹائی نہیں ہوتی۔

(۳) سطح کی لمبائی اور چوڑائی دونوں ہوتی ہیں، لیکن
اس کی موٹائی نہیں ہوتی۔

(۴) مجسم لمبائی، چوڑائی اور موٹائی تینوں رکھتا ہے۔
پس نقطہ کا کوئی بُعد نہیں ہوتا
خط کا ایک بُعد ہوتا ہے
سطح کے دو بُعد ہوتے ہیں

مجسم کے تین بُعد ہوتے ہیں
۲۔ پس مجسم، سطحیں، خط، نقطے باہم یہ تعلق رکھتے ہیں۔
(۱) سطحیں مجسموں کا احاطہ کرتی ہیں۔
(۲) خط سطحوں کا احاطہ کرتے ہیں، اور سطحوں کا تقاطع خطوط پر ہوتا ہے۔

(۳) خطوط کی حد بندی نقطوں سے ہوتی ہے اور خط ایک دوسرے کو نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔
یہ بھی یاد رکھنا چاہیے کہ ایک خط کسی سطح کو ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر قطع کر سکتا ہے۔

۳۔ سطح مستوی یا محض مستوی سے مراد وہ سطح ہے کہ اگر اس پر کوئی دو نقطے لئے جائیں تو ان نقطوں کو ملانے والا مستقیم خط بالتمام سطح مذکور میں واقع ہو۔

جب تک اس کے خلاف بالصریح نہ بیان کیا جائے اس حصہ میں خطوط مستقیم سے غیر متناہی طول کے مستقیم خط مراد ہونگے اور مستوی سطحوں سے غیر متناہی وسعت کی سطحیں مراد ہونگی۔

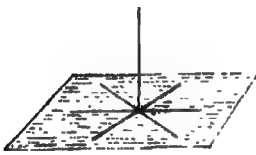
۴۔ جو خط ایک مستوی سطح میں کھینچے جائیں یا جن میں سے ایک مستوی سطح گزرے ان کو ہم سطح خط کہتے ہیں۔
۵۔ جن خطوں میں سے کوئی مستوی سطح نہ گزر سکے ان کو کانہ یا معوج خط کہتے ہیں۔

۶۔ مستوی سطحیں متوازی اُس وقت کہلاتی ہیں جبکہ وہ ایک دوسرے کو نہ ملیں خواہ انہیں کتنا ہی بڑھا یا جائے یا کتنی

ہی وسعت دی جائے۔

۷۔ ایک خط مستقیم اور سطح مستوی باہم متوازی اس وقت ہوتے ہیں جبکہ وہ ایک دوسرے سے نہیں خواہ انہیں کتنا ہی بڑھایا جائے۔

۸۔ ایک مستقیم خط، کسی مستوی سطح پر عمود اس وقت ہوتا ہے جب یہ اس سطح پر کے



ہر ایک خط سے جو اس سے ملتا ہو زاویہ قائمہ بنائے،

اس کو اس طرح بھی بیان کرتے ہیں کہ یہ خط سطح مستوی پر عمود ہے۔

علوم متعارفہ

۱۔ ایک مستقیم خط کسی مستوی سطح پر کے دو نقطوں کو ملاتا ہے، اس خط کو خواہ کتنا ہی خارج کیا جائے یہ بالتمام اسی سطح میں واقع ہوگا۔

۲۔ ایک مستقیم خط میں سے یا دو نقاط مفروضہ میں سے بیشمار مستوی سطحیں گزر سکتی ہیں، کیونکہ ظاہر ہے کہ اگر ایک مستوی سطح کو ایک ایسے مستقیم خط کے گرد جو اس میں واقع ہو گھمایا جائے تو یہ بالتواتر بیشمار مقامات میں سے گزرے گی۔

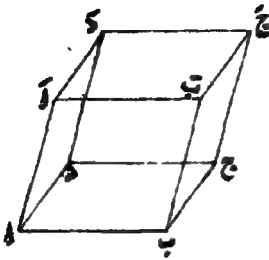
۳۔ اگر ایک لامحدود مستوی سطح ایک ایسے مستقیم خط کے گرد

گھومے جو اس میں واقع ہو تو یہ سطح فضا کے کسی ایسے نقطہ میں سے جو خط مذکور کے باہر ہو گزاری جاسکتی ہے۔
 ان اصولوں سے یہ واضح ہوتا ہے کہ ایک مستقیم خط کا تعلق کسی مستوی سطح کے ساتھ تین طرح کا ہو سکتا ہے۔
 (۱) یا یہ مستقیم خط، سطح مستوی کے متوازی ہوگا جس صورت میں اس کا کوئی نقطہ سطح مستوی کے ساتھ مشترک نہ ہوگا
 (۲) یا یہ خط، سطح مستوی کو کاٹے گا جس صورت میں اس کا ایک (اور صرف ایک ہی) نقطہ سطح مستوی کے ساتھ مشترک ہوگا۔

(۳) یا یہ سطح مستوی میں واقع ہوگا جس صورت میں اس کے لا انتہا نقطے سطح مستوی کے ساتھ مشترک ہوں گے۔
 نیز ایک مستقیم خط کا تعلق کسی اور مستقیم خط کے ساتھ تین طرح کا ہو سکتا ہے

اگر خطوط ہم سطح ہوں تو
 (۱) یہ ایک دوسرے کو قطع کریں گے
 یا (۲) ایک دوسرے کے متوازی ہوں گے
 اگر خطوط ہم سطح نہ ہوں تو
 (۳) نہ یہ ایک دوسرے کو قطع کریں گے اور نہ متوازی ہوں گے۔

مثلاً ساتھ کی شکل میں (۱) کنارے ا ب، ب ج مستوی سطح ا ب ج د میں واقع ہیں اور ایک دوسرے کو قطع کرتے



ہیں۔ (۲) ا ب اور

د ج ایک ہی سطح میں

ہیں اور ایک دوسرے

کے متوازی ہیں (۳)

ا ب اور ا د میں

سے کوئی مستوی سطح نہیں

گزر سکتی، یہ کانے خط

ہیں اس لئے یہ متقاطع ہیں اور نہ متوازی۔

مسئلہ اثباتی ۱ [اقلیدس م ۱۱ ش ۲]

دو متقاطع خطوط مستقیم میں سے ایک اور صرف ایک ہی سطح
مستوی گزر سکتی ہے۔

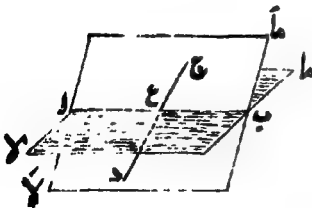
فرض کرو کہ خطوط مفروضہ ا ب اور ج د ایک دوسرے
کو ع پر قطع کرتے ہیں۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے

کہ ا ب اور ج د میں سے

ایک اور صرف ایک ہی سطح

مستوی گزر سکتی ہے۔



ثبوت۔ کوئی سطح مستوی لایا یہی

لو جو ا ب میں سے گزرتی ہو، تب اس سطح مستوی کو

ا ب کے گرد اتنا گھماؤ کہ یہ نقطہ ج میں سے گزرسکے اور

لاما کے مقام پہنچ جائے، اس طرح سے گھومنے والی سطح
مستوی کا مقام متعین ہو جائے گا۔ اس سے ثابت ہوا کہ صرف
ایک ہی سطح مستوی خط مستقیم اور نقطہ ج میں سے
گزر سکتی ہے، اور یہی ثابت کرنا تھا۔

نتیجہ صریح۔ اگر تین مستقیم خط ایسے ہوں کہ ان میں سے
کوئی دو ایک دوسرے کو قطع کریں، تو یہ تینوں خط ایک ہی
سطح مستوی میں واقع ہونگے۔

نتائج

کسی سطح مستوی کا مقام متعین ہو جاتا ہے اگر یہ
(۱) ایک دئے ہوئے خط مستقیم میں سے اور ایک ایسے
نقطہ میں سے جو اس خط کے باہر واقع ہو گزرے۔

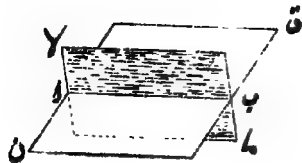
(۲) دو متقاطع مستقیم خطوں میں سے گزرے۔

(۳) تین ایسے نقاط میں سے گزرے جو ایک ہی خط مستقیم
پر واقع نہ ہوں۔

(۴) دو متوازی مستقیم خطوں میں سے گزرے۔

مسئلہ اثباتی ۲ [افلیدس م ۱۱ ش ۳]

دو متقاطع مستوی سطوح ایک دوسرے کو ایک خط مستقیم
پر کاٹتی ہیں اور اس خط کے باہر کسی اور نقطہ پر نہیں کاٹ
سکتیں۔



یہ ثابت کرنا مقصود ہے
کہ متقاطع سطوح مستویہ
ن ق، لاہا خط مستقیم
ا ب پر ایک دوسرے کو

کاٹتی ہیں اور اس کے باہر کسی اور نقطہ پر نہیں کاٹ سکتیں
ثبوت۔ فرض کرو کہ ا اور ب مستوی سطوح ن ق
اور لاہا دونوں پر واقع ہیں، تب ا اور ب کو ملانے والا
خط مستقیم بالتمام دونوں مستوی سطحوں میں واقع ہوگا یعنی
مستوی سطحیں ایک دوسرے کو خط مستقیم ا ب پر قطع کریں گی۔
نیز چونکہ یہ دونوں سطحیں ا ب میں سے گزرتی ہیں اسلئے
ان سطحوں کا کوئی مشترک نقطہ ا ب کے باہر نہیں ہو سکتا
ورنہ یہ سطحیں ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں گی۔

نوٹ۔ اس سے معلوم ہوگا کہ اگر (۱) تین یا تین سے زیادہ متراکز
خطوط مستقیم ایک اور خط مستقیم کو قطع کریں تو یہ سب خطوط ہم سطح ہوں گے۔
۲۔ اگر تین یا تین سے زیادہ متوازی خط ایک دے ہوئے خط مستقیم
کو قطع کریں تو یہ سب خطوط ہم سطح ہوں گے۔

مستوی سطح کی تشکیل

ہر ایک مستوی سطح کی تشکیل حسب ذیل طریقوں سے
ہو سکتی ہے۔

(۱) ایک ایسے خط مستقیم سے، جو اپنے ایک نقطہ کے گرد گردش

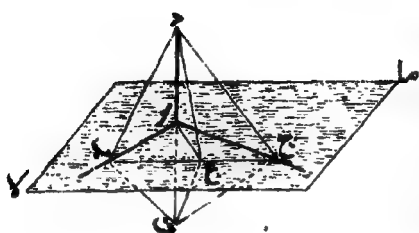
کرے اور ساتھ ہی ایک ثابت خط مستقیم پر بالتواتر پھسلتا جائے
(۲) ایک ایسے خط مستقیم سے جو دو ثابت متقاطع خطوط پر یا دو
ثابت متوازی خطوط پر علی التواتر پھسلے -
(۳) ایک ایسے خط مستقیم سے، جو ہمیشہ اپنے متوازی حرکت
کرے اور ایک ثابت خط مستقیم پر پھسلے -

فضا میں کے مثلث اور ذواربعۃ الاضلاع ہر مثلث

کے اضلاع لازماً ایک ہی سطح مستوی میں واقع ہوتے ہیں (مسئلہ ۱)
یعنی ضروری نہیں کہ ایک ذواربعۃ الاضلاع کے ضلعے بھی ایک
ہی سطح مستوی میں واقع ہوں جیسا کہ ایک مستوی ذواربعۃ الاضلاع
کو اس کے ایک نظر پر نہ کرنے سے ظاہر ہے، اس طرح سے جو
ذواربعۃ الاضلاع بنا ہے اس کو کانا یا معوج ذواربعۃ الاضلاع کہتے
ہیں، اس کے دو متصل اضلاع ایک مستوی سطح میں ہوتے ہیں اور
باقی دو دوسری مستوی سطح میں۔

مسئلہ اثباتی ۳ [اقلیس م ۱۱ ش ۲]

اگر ایک خط مستقیم دو متقاطع خطوط مستقیم میں سے ہر ایک
پر عمود ہو اور ان کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرے، تو ثابت
کر دو کہ یہ اُس مستوی سطح پر بھی عمود ہو گا جو متقاطع خطوط
میں سے گزرتی ہے۔



فرض کرو کہ AD
 ہر دو خطوط مستقیم AB
 اور AC پر عمود ہے
 یہ ثابت کرنا مقصود
 ہے کہ AD مستوی سطح
 ABC پر بھی عمود ہوگا جو
 AB اور AC میں
 سے گزرتی ہے۔

سطح مستوی ABC پر کوئی خط AD کھینچو جو A میں سے گزرے
 نیز اسی سطح مستوی میں ایک اور خط BE کھینچو جو AB ، AC
 اور BC کو بالترتیب B ، C ، E پر قطع کرے۔

D کو F تک اتنا خارج کرو کہ AF ، AD کے مساوی
 ہو، DB ، DC ، DE کو DA ، نیز F ، B ، C ، E کو F ، B ، C ، E کو
 ملاؤ۔

ثبیوت۔ مثلثات BAF اور DAF میں
 BA ، DA کی تقصیف زاویہ قائمہ پر کرتا ہے۔

$$BAF = DAF$$

اسی طرح سے $BCF = DCF$

پس اگر $\triangle BCF$ کو اس کے قاعدہ BC کے
 گرد اتنا گھمایا جائے کہ BF ، DC کی سطح
 میں آجائے تو فقط F ، D پر منطبق ہوگا کیونکہ مثلثات

ب ف ج اور ب د ج ہر طرح سے مساوی ہیں
یعنی ع ف = ع د پر منطبق ہوگا

یعنی ع ف = ع د

اب مثلثات د ا ع اور ف ا ع میں
د ا ع = ف ا ع د = ع ف اور ا ع مشترک ہے

اس لئے د ا ع = ف ا ع

یعنی د ا کسی مستقیم خط ا ع پر (جو اس سے سطح مستوی
لاما پر ملتا ہے) عمود ہے۔

یعنی د ا عمود ہے ا ب اور ا ج کی سطح مستوی پر

سوالات اور مشقیں

- ۱۔ "خطوط مستقیم متوازی اُس وقت ہوتے ہیں جبکہ وہ ایک دوسرے
سے نہیں خواہ انہیں کتنا ہی خارج کیا جائے متوازی خطوط کی مندرجہ بالا
تعریف میں کیا کمی ہے؟ اپنے جواب کی توضیح مثال کے ذریعہ کرو۔
- ۲۔ ایک کمرہ کی دیواروں اور کناروں سے مندرجہ ذیل کی مثالیں
پیش کرو۔

(۱) متوازی سطحیں

(۲) ایسے خط جو ایک سطح مستوی کے متوازی ہوں

(۳) ایسے خط جو ایک سطح مستوی پر عمود ہوں

(۴) لانے خطوں کے زوج۔

۳۔ ”سطحیں ایک دوسرے کو خطوط پر قطع کرتی ہیں“ کیا ضروری ہے کہ یہ خط مستقیم ہوں؟ اگر نہیں تو چند ایسی سطحوں کی مثالیں دو جس کے تقاطع سے معنی خط پیدا ہوتے ہیں۔

۴۔ ایک خط مستقیم کے کسی نقطہ معلومہ میں سے

(۱) دو ابعاد کی فضا میں

(۲) تین ابعاد کی فضا میں

کتنے مستقیم خط کھینچے جا سکتے ہیں جو ایک دئے ہوئے خط مستقیم پر عمود ہوں۔
۵۔ دو پہلوؤں کے ذریعہ اس امر کی توضیح کرو کہ اگر ایک خط کسی سطح مستوی میں کے ایک خط پر عمود ہو تو اس سے لازم نہیں آتا کہ یہ اس سطح پر بھی عمود ہوگا۔

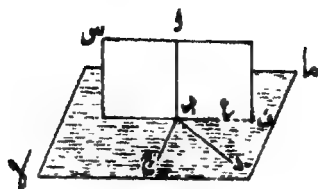
۶۔ ثابت کرو کہ فضا کے کسی نقطہ میں سے تین ایسے خط کھینچے جا سکتے ہیں جن میں سے ہر ایک باقی دو پر عمود ہو۔

نیز ثابت کرو کہ اس صورت میں ہر خط باقی دو کی سطح مستوی پر عمود ہوگا، اس امر کی توضیح کرہ کی دیواروں اور کناروں سے کرو۔

۷۔ ایک دائرہ کے مرکز و میں سے دو دائرہ کی سطح پر عمود کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ محیط ہر کے سب نقطے اسے متساوی نصفوں میں

مسئلہ اثباتی ۴ [اقلیدس م ۱۱ ش ۵]

ایک خط مستقیم کے کسی نقطہ مفروضہ میں سے اس خط پر عمود کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ یہ سب عمود ایک ہی سطح مستوی میں واقع ہوتے ہیں۔



فرض کرو کہ خطوط ب ج، ب د، ب ع میں سے ہر ایک
ا ب پر عمود ہے۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ ب ج، ب د، ب ع ہم سطح
ہیں۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ ب ج اور ب د میں سے گزرنیوالی
مستوی سطح لا ما ہے اور ا ب اور ا ع میں سے گزرنیوالی
مستوی سطح س ف ہے۔

نیز فرض کرو کہ سطوح س ف اور لا ما ایک دوسرے
کو خط مستقیم ب ف پر قطع کرتی ہیں
چونکہ ا ب عمود ہے ب ج اور ب د پر

ب ف پر بھی عمود ہے کیونکہ ب ف خطوط ب ج،
ب د کی سطح مستوی میں واقع ہے اور ا ب سے ب پر قائم ہے [سک ۳۰]
اس لئے زاویہ ا ب ع، ا ب ف دونوں قائمے

ہیں اور دونوں ایک ہی سطح مستوی س ف میں واقع ہیں

۱. ب، ج، د، ب ف پر منطبق ہوتا ہے

یعنی ب، ج، د، ب ف تینوں ایک ہی مستوی سطح لایا میں واقع ہیں۔

فرع۔ اگر ایک زاویہ قائمہ اپنی ایک ساق کے گرد گھومے تو اس کی دوسری ساق کی گردش سے ایک مستوی سطح پیدا ہوتی ہے۔

عمل مفروضہ۔ ہم فرض کر سکتے ہیں کہ ایک خط مستقیم کے کسی نقطہ میں سے ایک مستوی سطح کھینچی جاسکتی ہے جو خط مذکور پر عمود ہو۔

تعریفات

۱۔ اگر ایک شاقول بجا لے سکون بلا تکلف لٹک رہا ہو تو اس کی ڈوری کی سمت کو انتصابی سمت کہتے ہیں۔

۲۔ جو مستوی سطح انتصابی خط پر عمود ہو وہ افقی سطح کہلاتی ہے۔

۳۔ جو خط افقی سطح پر کھینچا جائے اس کو افقی خط کہتے ہیں۔

سوالات اور مشقیں

۱۔ ایک نقطہ معلوم میں سے کتنے انتصابی خط کھینچے جاسکتے ہیں اور کتنے افقی؟

۲۔ ایک چٹھی کے کاغذ کو ذرا کھول کر ایک افقی میز پر اس طرح رکھا

حمیا ہے کہ اس کے دونوں چھوٹے کنارے میز سے مس کرتے ہیں بتاؤ کہ شکن کیوں انتصابی ہے؟

۳۔ یہ دیکھنے کے لئے کہ ایک سطح متوازی الافقی ہے یا نہیں ثابت کرو کہ سپرٹ لیول کے ساتھ دو مشاہدے کافی ہیں بشرطیکہ اس کے دونوں محل ایک دوسرے کے متوازی نہ ہوں۔

۴۔ ایک افقی سطح پر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جس کا نصف قطر ۲ و ۴ سنتی میٹر ہے، دائرے کے مرکز سے ایک انتصابی خط و ن ۵ و ۶ سنتی میٹر لمبا کھینچا گیا ہے، نقطہ ن کا فاصلہ محیط پر کے کسی نقطہ سے معلوم کرو اور ثابت کرو کہ محیط پر کے سب نقطوں کے لئے یہ فاصلہ وہی رہتا ہے۔

۵۔ دو خطوط مستقیم اب اور ج د ایک دوسرے کی وپر تقصیف کرتے ہیں اور ون دونوں پر عمود ہے، ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ ن } ۱ = \text{ ن } ۲ \quad (۲) \text{ ن } ۱ = \text{ ن } ۲$$

اور یہ نتیجہ اب اور ج د کے زاویہ تقاطع پر موقوف نہیں۔

اگر اب = ۳ و ۶، ج د = ۱ و ۴، ون = ۲ و ۴ تو ن ۱ اور ن ۲ کے طول معلوم کرو۔

۶۔ اب ج د ایک افقی مربع ہے اور اس کے وسطی نقطہ (یعنی اس کے قطروں کے نقطہ تقاطع) وپر ایک انتصابی سلاخ ون ثابت کر دی گئی ہے اور اس کے سرے ن کو ڈوروں کے ذریعہ مربع کے گوشوں کے ساتھ ملا دیا گیا ہے۔

(۱) ثابت کرو کہ ن ۱، ن ۲، ن ۳، ن ۴ سب

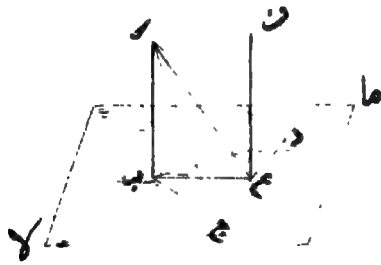
مساوی ہیں۔

(۲) اگر مربع کا ہر ایک ضلع ۲۰ سنٹی میٹر ہو اور سلاخ کی بلندی ۴۰ سنٹی میٹر، تو ن کا طول قریب ترین ملی میٹر تک معلوم کرو۔

(۳) اگر ن ۸۵ سنٹی میٹر اور سلاخ کی بلندی ۵۰ سنٹی میٹر ہو تو مربع کا ضلع قریب ترین ملی میٹر تک معلوم کرو۔

مسئلہ اثباتی ۵ [آقلیدس م ۱۱ ش ۸]

دو خطوط مستقیم متوازی ہیں اور ان میں سے ایک کسی سطح مستوی پر عمود ہے، گناہت کرو کہ دوسرا خط بھی اسی سطح مستوی پر عمود ہوگا۔



فرض کرو کہ ا ب اور ف ع دو متوازی مستقیم خط ہیں جو سطح مستوی لا ما کو ب اور ع پر کاٹتے ہیں، نیز فرض کرو کہ ا ب سطح مستوی پر عمود ہے۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ ف ع بھی سطح مستوی لا ما پر عمود ہوگا۔ ا ع اور ب ع کو ملاؤ اور سطح مستوی لا ما میں خط

مستقیم ج ع د کھینچو جو ع میں سے گزرے اور ب ع پر عمود ہو، نیز ج ع اور ع د کو مساوی بناؤ۔

ب ج ' ب د کو نیز ا ج ' ا د کو طواؤ ثبوت۔ چونکہ ع ب ' ج د کی زاویہ قائمہ پر تنصیف کرتے ہیں

$$\therefore \text{ب ج} = \text{ب د}$$

اور مثلثات ا ب ج اور ا ب د میں

چونکہ ب ج = ب د، ا ب مشترک ہے

اور $\angle \text{ا ب ج} = \angle \text{ا ب د}$

کیونکہ ا ب عمود ہے ب ج اور ب د کی سطح مستوی پر

$$\therefore \angle \text{ا ج} = \angle \text{ا د}$$

نیز $\triangle \text{ج ع ا}$ اور $\triangle \text{د ع ا}$ میں

چونکہ ج ع = د ع، ع ا مشترک ہے اور $\angle \text{ا ج} = \angle \text{ا د}$

$$\therefore \angle \text{ج ع ا} = \angle \text{د ع ا}$$

یعنی ج ع ' ع ا پر عمود ہے

لیکن بموجب ا ب ج ع ' ع ب سے زاویہ قائمہ بناتا ہے

\therefore ج ع عمود ہے ع ا اور ع ب کی سطح مستوی پر

اور ع ف بھی اسی سطح مستوی میں واقع ہے کیونکہ ع ا ' ع ب

دونوں متوازیات ا ب اور ف ع کی سطح مستوی میں واقع

ہیں۔

\therefore ج ع بھی ع ف پر عمود ہے

نیز چونکہ ا ب اور ف ع متوازی ہیں اور مفروضات کی رو سے

۱۔ ا ب ع قائمہ ہے

۲۔ ف ع ب بھی قائمہ ہے

پس ف ع خطوط ا ب اور ع ج پر عمود ہونے کی وجہ سے
مستوی لایا پر بھی عمود ہے جس میں یہ دونوں واقع ہیں۔
برعکس اس کے اگر ا ب اور ف ع دونوں سطح مستوی لایا
پر عمود ہوں تو وہ ایک دوسرے کے متوازی ہونگے۔

بوجب سابق اوپر کے عمل سے ثابت کر دے کہ ج ع عمود ہے
ع ا اور ع ب کی سطح مستوی پر

اب مفروضات سے واضح ہے کہ ج ع ف پر عمود ہے
۳۔ ف ع خطوط ع ا اور ع ب کی سطح میں واقع ہے۔

لیکن چونکہ ا ب بھی ع ا اور ع ب کی سطح مستوی میں واقع ہے
۴۔ ا ب اور ف ع ہم سطح ہیں۔

اور چونکہ مفروض کی توجہ سے زاویے ا ب ع اور ف ع ب قائمے ہیں
اسلئے ا ب متوازی ہے ف ع کے اور یہی ثابت کرنا تھا۔

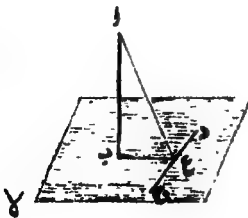
فرع۔ اگر ا ب سطح مستوی لایا پر عمود ہو اور اس کے پائین ب سے
سطح پر کے کسی خط ج د پر عمود ب ع

کھینچا جائے تو ا اور ع کو ملانیو لایا خط

ج د پر عمود ہوگا۔ ع ج اور ع د
کو ایک دوسرے کے مساوی بناؤ۔

ب ج اور ب د کو نیز

ا ج اور ا د کو ملاؤ



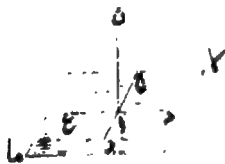
ثبوت قریب قریب وہی ہے جو اوپر دیا گیا۔
 اس مشہور نتیجہ کو "تین عمودوں کا مسئلہ" کہتے ہیں۔

مسئلہ اثباتی ۶

کسی ایسے نقطہ سے جو ایک سطح مستوی پر واقع ہو یا اس کے
 باہر، صرف ایک ہی مستقیم خط کھینچا جاسکتا ہے جو سطح مستوی
 پر عمود ہو۔

(۱) فرض کرو کہ نقطہ مفروضہ ۱ سطح مستوی لاما پر واقع ہے
 سطح مستوی میں کوئی خط

ب ج لو جو ۱ میں
 سے گزرتا ہو



فرض کرو کہ ایک

خط ان 'ب ج' کے

ساتھ زاویہ قائمہ بناتا ہے

اور اس کے گرد گردش کرتا ہے، تب ان ایک ایسی سطح
 مرتب کر یگا جو ب ج پر عمود ہوگی، فرض کرو کہ یہ سطح مستوی
 لاما کو خط مستقیم د ا ع پر قطع کرتی ہے۔

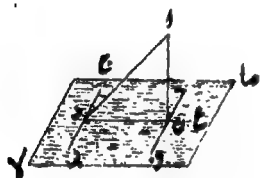
اب جبکہ ان گردش کر کے ا د سے ا ع کے مقام پر
 آتا ہے تو اثنائے حرکت میں لازماً یہ ایک ایسے محل میں سے
 گزرتا ہے جس میں یہ د ع پر عمود ہوتا ہے، یعنی ب ج اور
 د ع دونوں پر عمود ہوتا ہے، لہذا سطح مستوی لاما پر عمود ہوتا ہے

(۲) فرض کرو کہ نقطہ 'م' فرضہ ۱ سطح مستوی لاما کے باہر واقع ہے۔

سطح مستوی میں کوئی خط ب ج کھینچو اور ۱ سے ب ج پر عمود ۱ د نکالو۔

سطح مستوی لاما میں ب ج پر عمود د ع کھینچو۔
فرض کرو کہ ان عمود ہے نقطہ ۱ سے د ع پر۔

تب ان سطح مستوی لاما پر عمود ہو گا۔



ثبوت۔ نقطہ ن میں سے
ن ف، ب ج کے متوازی
کھینچو۔

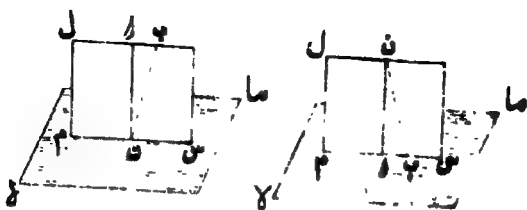
اب چونکہ ب ج دونوں خطوط د ۱ اور د ع پر عمود ہے اسلئے
یہ سطح مستوی ۱ د ع پر بھی عمود ہے

لہذا ن ف بھی سطح مستوی ۱ د ع پر عمود ہے [مسئلہ ۱]
۱ د > ان ف قائمہ ہے

یعنی ان عمود ہے ن ف اور د ع دونوں پر

یعنی ان سطح مستوی لاما پر عمود ہے

(۳) کسی نقطہ ن سے سطح مستوی لاما پر ایک اور
صرف ایک ہی عمود کھینچ سکتا ہے خواہ نقطہ ن سطح مستوی
پر واقع ہو یا اس کے باہر۔



اگر دو عمود کھینچنا ممکن ہو تو فرض کرو کہ نقطہ ن سے سطح مستوی
لا ما پر دو عمود ن ا، ن ب کھینچے گئے ہیں، نیز فرض کرو
کہ دو سطح مستوی جون ا، ن ب میں سے گزرتی ہے سطح
مستوی لا ما کو خط مستقیم م س پر قطع کرتی ہے
تب ن ا، ن ب دونوں ایک ہی سطح میں م س پر
عمود ہیں جو صریحاً ناممکن ہے۔

مشقیں

- ۱۔ ایک سطح مستوی کے کسی نقطہ پر ایک سیدھی سلاخ کو عمود وار کھڑا
کرنا مقصود ہے، بتاؤ کہ یہ عمل دو گنیوں کی مدد سے کس طرح ہو سکتا ہے
- ۲۔ ایک ایسے مستقیم خط کا مقام معلوم کرنا مطلوب ہے جو کسی نقطہ
بیردنی سے سطح مستوی لا ما پر عمود ہو، بتاؤ کہ اس غرض کے لئے
ایک سیدھی سلاخ اور گنتے کو عمل مسئلہ ۲ کے مطابق کس طرح
استعمال کر سکتے ہیں۔

۳۔ کسی مجسم کی ایک مستوی سطح پر ایک خط مستقیم ب ج کھینچا گیا ہے

اور ایک نقطہ Δ سطح مستوی کے باہر واقع ہے [دیکھو شکل ۲ مسئلہ ۱] ایک ایسے مستقیم خط کا مقام دریافت کرنا مقصود ہے جو Δ میں سے گزرے اور ب ج پر عمود ہو، بتاؤ کہ ایسا کرنے کا معمولی طریقہ [اسکول جریٹری مسئلہ عملی ص ۳] کیوں یہاں کارآمد نہیں ہوتا۔

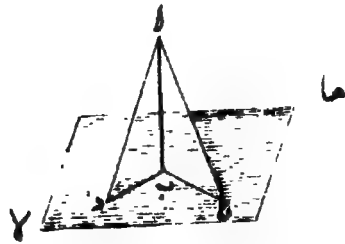
پٹری اور پرکار کی مدد سے کوئی اور مناسب عمل دریافت کرو جس سے مطلوبہ عمود Δ کا پایہ معلوم ہو سکے اور اس کی بنا پر بتاؤ کہ کس طرح نقطہ Δ سے سطح مستوی پر عمود کھینچ سکتا ہے۔

[علاوہ اس کے ایک نقطہ بیرونی سے سطح مستوی پر عمود کھینچنے کے لئے دیکھو اگلے مسئلہ کی مشق ۳]

مسئلہ اشباتی ۷

(۱) اُن سب خطوط میں سے جو کسی نقطہ بیرونی سے ایک سطح مستوی تک کھینچے جائیں عمود سب سے چھوٹا ہوتا ہے۔

(۲) نقطہ مفروضہ میں سے گزرنے والے مائل خطوط میں سے وہ سب خط آپس میں مساوی ہونگے جن کے پائے عمود کے پایہ سے مساوی فاصلوں پر ہوں۔



(۱) فرض کرو کہ کسی بیرونی نقطہ A سے سطح مستوی AB پر A ب عمود اور A ج کوئی خط مائل کھینچا گیا ہے یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ A ب چھوٹا ہے A ج سے

ب ج کو ملاؤ

ثبوت - چونکہ A ب سطح مستوی AB پر عمود ہے اس لئے A ج پر بھی عمود ہے کیونکہ خط A ج سطح مستوی AB پر واقع ہے اور A ب سے A ج پر ملتا ہے۔

پس مثلث ABJ میں

$\angle A$ ب ج چھوٹا ہے $\angle A$ ج سے

نہ A ب چھوٹا ہے A ج سے

(۲) فرض کرو کہ خطوط مائل A ج اور A د سطح مستوی AB کو C اور D پر قطع کرتے ہیں اور نقاط C اور D کے فاصلے عمود A ب کے پایہ B سے مساوی ہیں۔

یعنی B د = B ج

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ A ج = A د

ثبوت - چونکہ A ب سطح مستوی AB پر عمود ہے اس لئے اس سطح میں کے خطوط A ج، A د دونوں پر عمود۔ جو اس سے نقطہ B پر ملتے ہیں۔

پس مثلثات ABJ ، ABD ہر طرح سے ایک د کے مساوی ہیں۔

کیونکہ A ب دونوں میں مشترک ہے، B ج = B د

۱۔ ا ب ج = د ا ب د

۲۔ ا ج = د ا د

مشقیں

۱۔ کسی نقطہ بیرونی سے ایک سطح مستوی پر مساوی انکسار کھینچے گئے ہیں انکے پایوں کا طریق دریافت کرو
۲۔ مثلث ا ب ج کے باہر ایک نقطہ ن ہے جس کے فاصلے اُسوں سے مساوی ہیں، نقطہ ن سے مثلث کی سطح پر عمود نکالا گیا ہے جو اس کو س پر قطع کرتا ہے، ثابت کرو کہ س مثلث کے بیرونی دائرہ کا مرکز ہے۔

اگر مثلث ا ب ج کا زاویہ ج قائمہ ہو اور ضلع $AB = ۸$ و $BC = ۶$ اور $AC = ۱۰$ تو ن ا کا طول دریافت کرو۔
۳۔ پٹری پر کار اور ایک سیدھی سلانج کی مدد سے ایک سطح مستوی پر کسی نقطہ بیرونی سے عمود نکالنے کا عملی طریقہ دریافت کرو، سلانج کی لمبائی مطلوبہ عمود سے زیادہ ہے۔

۴۔ تین مستقیم خط ایک نقطہ پر ملتے ہیں مگر ہم سطح نہیں، ایک اور مستقیم خط کھینچنے کا ہندسی عمل دریافت کرو جو ان تینوں خطوط سے مساوی زاوے بنائے۔

۵۔ ایک خط مستقیم ا ب سطح مستوی لاما میں واقع ہے اور کسی بیرونی نقطہ ن سے سطح مستوی پر عمود ن ق نکالا گیا ہے۔
(۱) اگر ق ر، ا ب پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ ن ر بھی

۱ ب پر عمود ہوگا۔

(۲) اگر ن ر، ۱ ب پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ ق ر بھی ۱ ب

پر عمود ہوگا۔

۶۔ ایک مربع ۱ ب ج د کا ضلع ۰.۱۹۶ میٹر ہے، اس کے وسطی نقطہ ق پر ایک سلاخ ق ن (طول = ۱۴۰ میٹر) ثابت کر دی گئی ہے جو مربع کی سطح پر عمود ہے، اگر ضلع ب ج کا وسطی نقطہ ر ہو تو جہن ر ق کی قیمت اعتدالیہ کے تیسرے مقام تک محسوب کرو۔

۷۔ دو مستوی سطحوں کا خط تقاطع ۱ ب ہے، اس پر کے کسی نقطہ ن سے مستوی سطحوں میں خطوط ن ق، ن ر کھینچے گئے ہیں جو دونوں ۱ ب پر عمود ہیں، ثابت کرو کہ اگر ن ق پر کے کسی نقطہ سے اُس مستوی سطح پر عمود نکالا جائے جس میں ن ق واقع ہے تو یہ عمود ن ق ن ر کی سطح مستوی میں واقع ہوگا۔

۸۔ ثابت کرو کہ

(۱) فضا میں کے وہ سب نقطے جو دو نقاط مفروضہ سے متساوی

افضل ہوں ایک مستوی سطح پر واقع ہوتے ہیں۔

(۲) فضا میں کے وہ سب نقطے جو تین غیر مسامت نقطوں سے متساوی

افضل ہوں ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں۔

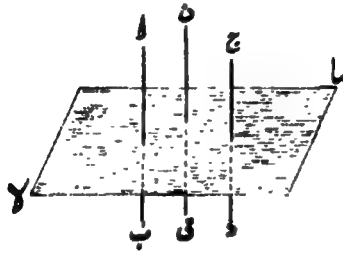
(۳) چار نقطے ایسے ہوں جو ایک ہی سطح مستوی پر واقع نہیں

ہوتے، ثابت کرو کہ ایسا نقطہ صرف ایک ہی ہو سکتا ہے جو ان چاروں

سے متساوی افضل ہو (یہ نقطہ دو مستقیم خطوط کا نقطہ تقاطع ہوگا)

مسئلہ اثباتی ۸ [اقلیدس م ۱۱ ش ۹]

جو خطوط مستقیم ایک مفروضہ خط مستقیم کے متوازی ہوں وہ ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔



فرض کرو کہ ا ب اور ج د دونوں خط مستقیم ن ق کے متوازی ہیں۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ ا ب اور ج د بھی ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ لا ما کوئی سطح مستوی ہے جو ن ق پر عمود ہے۔

اب چونکہ ا ب ، ن ق کے متوازی ہے

اسلئے ا ب بھی سطح مستوی لا ما پر عمود ہے [مسئلہ ۵]

اور چونکہ ج د ، ن ق کے متوازی ہے

اسلئے ج د بھی سطح مستوی لا ما پر عمود ہے [مسئلہ ۵]

اب چونکہ ا ب اور ج د دونوں سطح مستوی لا ما پر

عمود ہیں اس لئے یہ ایک دوسرے کے متوازی
ہیں۔ [مسند کا عکس]

نوٹ۔ اس مسئلہ کا جواب اس صورت میں خیر اب 'ج' د' ن' ق' ایک ہی سطح مستوی میں واقع ہوں چلے دیا جا چکا ہے۔

(دیکھو: سکول جو میٹری مسئلہ ابتدائی ۱۵)

مشقیں

۱۔ تین مستقیم خط AB ، CD ، EF ایک دوسرے کے
مساوی اور متوازی ہیں لیکن ایک سطح مستوی میں واقع نہیں ہیں
ثابت کرو کہ مثلث ABC اور DEF ایک دوسرے کے
ہر طرح سے مساوی ہیں۔

۲۔ اگر ایک متوج کثیر الاضلاع کے متصل اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملا دیا جائے تو ثابت کرو کہ جو شکل اس طرح سے بنے گی وہ متوازی الاضلاع ہوگی۔

۳۔ اگر ایک مثلث اپنے قاعدہ کے گرد گردش کرے تو ثابت کرو کہ اس کا راس ایک دائرہ مرتسم کرے گا۔

۴۔ افقی سطح پر ایک منظم سدس بنایا گیا ہے اور اس کے وسطی نقطہ سے اس کی سطح پر ون عمود کھینچی گیا ہے جس کا طول ۹۵۶ سنتی میٹر ہے، ضلع اب کی تنصیف لا پر کی گئی ہے،

اگر اب = ۴۰ سم تو ۱' ولا، ۱' لا، ۱' جم وان
جم ولاں کی قیمتیں دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اب، ۱' لا

پر عمود ہے۔

مسئلہ اثباتی ۹ [اقلیدس م ۱۱ ش ۱]

اگر دو متقاطع خطوط مستقیم دو اور متقاطع خطوط کے بالترتیب متوازی ہوں اور دوسرا زوج پہلے زوج کی سطح مستوی میں واقع نہ ہو تو ثابت کر دو کہ پہلے زوج کا درمیانی زاویہ دوسرے زوج کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہے۔

فرض کر دو کہ خطوط اب اور

ب ج بالترتیب خطوط د ع

اور ع ف کے متوازی ہیں

اور دوسرا زوج پہلے زوج

کی سطح میں واقع نہیں ہے۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ

ب ج = د ع

ب ا کو د کے اور ب ج کو ع کے مساوی بناؤ۔ ا د

ب ع، ج ف، ا ج، د ف کو ملاؤ۔

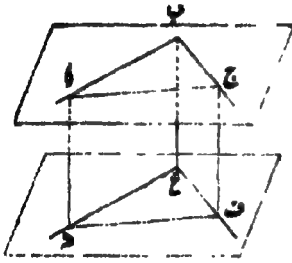
ثبوت۔ چونکہ ب ا، ع د کے مساوی اور متوازی ہے

∴ ا د، ب ع کے مساوی اور متوازی ہے

اسی طرح بے ج ف، ب ع کے مساوی اور متوازی ہے

اب چونکہ ا د اور ج ف دونوں ب ع کے مساوی

اور متوازی ہیں۔ اسلئے یہ دونوں (ا د اور ج ف) ایک



دوسرے کے مساوی اور متوازی ہیں۔ [مسئلہ ۸]
 لہذا اب مساوی اور متوازی ہوا د ف کے
 تین مثلثات ا ب ج اور د ع ف میں
 چونکہ ا ب، ب ج، ا ج بالترتیب مساوی ہیں د ع، ع ف،
 د ف کے،

$$\therefore \triangle ا ب ج = \triangle د ع ف$$

اور یہی ثابت کرنا تھا۔

مسئلہ اثباتی ۱۰ [اقلیدس م ۱۱ ش ۳]

جن مستوی سطحوں پر ایک ہی خط مستقیم عمود ہو وہ ایک
 دوسرے کے متوازی ہوتی ہیں۔

فرض کرد کہ خط

مستقیم ا ب سطوح

مستویہ لاما ن ق

پر عمود ہے۔

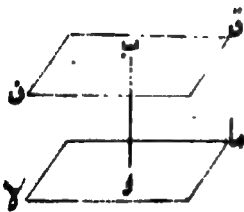
یہ ثابت کرنا مقصود

ہے کہ مستوی سطحیں

لاما اور ن ق

ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

ثبوت۔ چونکہ ا ب سطح مستوی لاما پر عمود ہے اسلئے
 اس خط پر بھی عمود ہوگا جو لاما کو سطح لاما پر کے کسی نقطہ



سے ملاتا ہے۔

اسی طرح سے خط AB اس خط پر بھی عمود ہوگا جو نقطہ B کو سطح ABC پر کے کسی نقطہ سے ملاتا ہے
لہذا اگر سطوح AB اور ABC میں کوئی نقطہ مشترک ہو تو ہم اس طرح اس نقطہ کو AB اور ABC کے ساتھ ملائے
سے خط مستقیم AB پر ایک ہی نقطہ M سے دو عمود MA
اور MB کھینچ سکتے ہیں جو صریحاً ناممکن ہے، پس ثابت ہوا
کہ سطوح AB اور ABC میں کوئی نقطہ مشترک نہیں ہو سکتا
یعنی یہ سطحیں ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

مشقیں

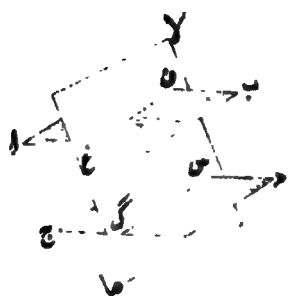
۱۔ AB اور CD دونوں ایک سطح مستوی پر عماد ہیں اور اس کو B اور D پر قطع کرتے ہیں، اگر AB اور CD کے طول برابر ہوں اور یہ دونوں سطح مستوی کے ایک ہی جانب واقع ہوں تو ثابت کر دو کہ AB اور CD ایک سطحیں ہیں۔

۲۔ گزشتہ مشق کو استعمال کرنے سے ایک ایسے نقطہ کا طریق دریافت کرو جس کا فاصلہ ایک مفروضہ سطح مستوی سے ہمیشہ وہی ہے۔
۳۔ ایک ایسے نقطہ کا طریق دریافت کرو جس کا فاصلہ دو نقاط مفروضہ سے

ہمیشہ وہی رہے۔ مسئلہ اثباتی ۱۱ [اقلیدس م ۱۱ ش ۶]

ایک مستوی سطح دو متوازی مستوی سطحوں کو قطع کرتی ہے،

ثابت کرو کہ خطوط تقاطع ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔



فرض کرو کہ سطح مستوی لاما سطوح متوازی اب اور ج د
کو خطوط مستقیم ع ف اور گ س پر قطع کرتی ہے۔
یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ ع ف اور گ س ایک دوسرے
کے متوازی ہیں۔

ثبوت۔ خطوط ع ف اور گ س ایک دوسرے سے
مل نہیں سکتے کیونکہ یہ بالترتیب مستوی سطوح اب اور ج د
میں واقع ہیں اور ان سطحوں میں کوئی نقطہ مشترک نہیں۔
نیز ع ف اور گ س دونوں ایک مستوی سطح لاما
میں واقع ہیں۔

اس لئے ع ف اور گ س متوازی ہیں۔

مشقیں

۱۔ ایک نقطہ مفرد میں سے صرف ایک مستوی سطح کھینچ سکتی ہے۔

ایک مفروضہ مستوی سطح کے متوازی ہو۔

۲۔ اگر ایک خط مستقیم دو متوازی مستویات میں سے کسی ایک پر عمود ہو تو یہ دوسری سطح پر بھی عمود ہوگا۔

۳۔ ثابت کرو کہ جو مستوی سطحیں ایک مفروضہ مستوی سطح کے متوازی ہوں وہ ایک دوسرے کے متوازی ہوتی ہیں۔

۴۔ ثابت کرو کہ متوازی مستقیم خطوں کے جو حصے متوازی سطحوں کے درمیان واقع ہوتے ہیں وہ ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

۵۔ متوازی سطحوں کے دو زوج معلوم ہیں، بتاؤ کہ ان کے خطوط تقاطع کتنے ہونگے؟ ثابت کرو کہ یہ سب خط ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

مسئلہ اثباتی ۱۲ [اقلیدس م ۱۱ ش ۱۵]

اگر دو متقاطع مستقیم خط متوازی ہوں بالترتیب دو اور متقاطع

مستقیم خطوں کے تین

ان کی سطح میں واقع

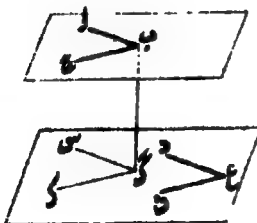
نہ ہوں تو پہلے زوج

کی سطح مستوی دوسرے

زوج کی سطح مستوی

کے متوازی ہوگی۔

فرض کرو کہ خطوط



مستقیم ا ب ، ب ج متوازی ہیں بالترتیب د ع ، ع ف کے جو ا ب ، ب ج کی سطح مستوی میں واقع نہیں ہیں۔ یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ ا ب ، ب ج کی سطح مستوی د ع ، ع ف کی سطح مستوی کے متوازی ہے۔ نقطہ ب سے د ع ، ع ف کی سطح مستوی پر عمود ب گ نکالو جو اس سے گ پر ملے۔

گ س ، گ ک بالترتیب ع د اور ع ف کے متوازی کھینچو۔
ثبوت :- چونکہ ب گ عمود ہے د ع ، ع ف کی سطح

مستوی پر
∴ زاوے ب گ س اور ب گ ک قائمے ہیں۔
اب مفروضات کی رو سے ب ا متوازی ہے ع د کے اور ع ل کی رو سے گ س متوازی ہے ع د کے۔

∴ ب ا متوازی ہے گ س کے [مسئلہ ۸]
اور چونکہ ب گ س قائمہ ہے
∴ ب ا ب گ قائمہ ہے
اسی طرح ب ج ب گ قائمہ ہے

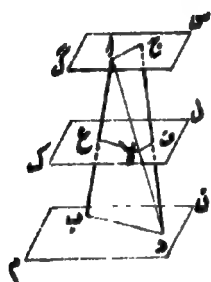
∴ ب گ عمود ہے ا ب ، ب ج کی سطح مستوی پر اور ع ل کی رو سے ب گ عمود ہے ع د ، ع ف کی سطح مستوی پر۔

اسلئے ا ب ، ب ج کی سطح مستوی متوازی ہے

ع د، ع ف کی سطح مستوی کے، اور یہی ثابت کرنا تھا۔ [مسئلہ ۱۰]

مسئلہ اثباتی ۱۳ [اقلیدس م ۱۱ ش ۱]

اگر متوازی سطوح مستویہ مستقیم خطوں کو قطع کریں تو وہ سب خطوط کو ایک ہی نسبت سے قطع کرینگے



فرض کرو کہ تین متوازی سطوح مستویہ گ س، ک ل، م ن خطوط مستقیم ا ب، ج د کو نقاط ا، ع، ب اور ج، ف، د پر قطع کرتی ہیں۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ نسبت ا ع : ب = ج ف : ف د،

ا ج، ب د، ا د کو ملاؤ اور فرض کرو کہ خط ا د

سطح مستوی ک ل سے نقطہ لا پر ملتا ہے، ع لا، لا ف کو ملاؤ۔

ثبوت - چونکہ دو متوازی سطوح مستویہ ک ل، م ن کو سطح مستوی ا ب د قطع کرتی ہے، اس لئے تقاطع کے خطوط ع لا، ب د ایک دوسرے کے متوازی ہیں [مسئلہ ۱۱]

نیز چونکہ دو متوازی سطوح متویہ گ س، ک ل کو سطح مستوی
د ا ج قطع کرتی ہے اسلئے تقاطع کے خطوط لاف، ا ج
باہم متوازی ہیں۔

اب چونکہ ع لا متوازی ہے ب د کے جو ایک ضلع
ہے مثلث ا ب د کا

$$\therefore \text{اع} : \text{ع ب} = \text{الا} : \text{لا د}$$

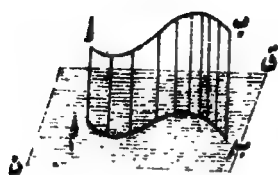
نیز چونکہ لاف متوازی ہے ا ج کے جو مثلث د ا ج کا
ایک ضلع ہے

$$\therefore \text{الا} : \text{لا د} = \text{ج ف} : \text{ف د}$$

$$\text{اس لئے اع} : \text{ع ب} = \text{ج ف} : \text{ف د}$$

۱۔ دو متوازی سطوح مستوی دو متقاطع سطوح مستوی کو قطع کرتی
ہیں، اس طرح سے پہلے زوج کی ہر ایک سطح اور دوسرے زوج کی
دونوں سطحوں کے تقاطع سے خطوط مستقیم کے دو زوج حاصل
ہوتے ہیں، ثابت کر دو کہ پہلے زوج کے خطوط کا درمیانی زاویہ دوسرے
زوج کے خطوط کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہے، اس کی مستثنیٰ
صورت بیان کرو۔

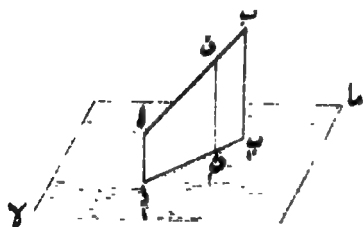
۲۔ بتاؤ کہ کسی مفروضہ خط مستقیم پر ایک ایسے نقطہ کا تین کس طرح ہو سکتا
ہے جس کے فاصلے دو ثابت نقطوں سے مساوی ہوں یکس صورت میں ناممکن ہوگا۔
تقریظ۔ اگر کسی خط مفروضہ کے ہر ایک نقطہ سے ایک
سطح مستوی پر عمود نکالے جائیں تو ان عمودوں کے پایوں
کا جو طریق ہو اس کو خط مذکور کا نفل سطح مستوی پر کہتے



ہیں۔
ساتھ کی شکل میں خط ا ب
کا ظل سطح ن ق پر ا ب
ہے۔

مسئلہ اثباتی ۱۳

کسی سطح مستوی پر ایک خط مستقیم کا ظل بھی خط مستقیم ہوتا ہے
فرض کرو کہ مفروضہ خط



مستقیم ا ب ہے اور سطح
مستوی لا ما ہے۔

نیز فرض کرو کہ ا ب
پر کے کسی نقطہ ن سے

سطح مستوی لا ما پر عمود

ن ن کھینچا گیا ہے جو اس سے ن پر ملتا ہے۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ ن کا طریق خط مستقیم ہے

ا اور ب سے سطح مستوی لا ما پر عمود ا ا، ب ب کھینچو

ثبوت۔ خطوط ا ا، ب ب، ن ن سب ایک

دوسرے کے متوازی ہیں کیونکہ یہ سب سطح مستوی لا ما

پر عمود ہیں۔ [مسئلہ کا عکس]

نیز یہ سب متوازی خط ایک ہی سطح مستوی میں واقع

ہیں کیونکہ یہ سب خط مستقیم ا ب کو قطع کرتے ہیں۔

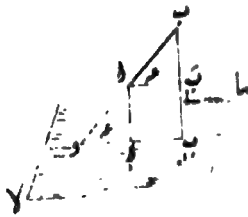
اس لئے نقطہ ن سطوح مستویہ اب اور لاما کے خط تقاطع پر واقع ہے۔

یعنی ن خط مستقیم اب پر واقع ہے
لیکن چونکہ ن اب کے ظل پر کا کوئی نقطہ ہے
اب کا ظل خط مستقیم اب ہے

فرع ۱۔ ایک خط مستقیم اب اور ایک سطح مستوی لاما کے درمیانی زاویہ کا ناپ وہ زاویہ ہے جو اب اور سطح مستوی پر اس کے ظل کے درمیان بنتا ہے کیونکہ ایک خط مستقیم اور اس کا ظل ہم سطح ہوتے ہیں۔

مثلاً اگر اب اور اب
(ممدودہ بشرط ضرورت) ایک

دوسرے سے و پر ہیں تو
اب اور سطح مستوی لاما کے
درمیانی زاویہ کا ناپ
ب ب و ب ہوگا۔



فرع ۲۔ سطح مستوی لاما پر جو اب کا ظل ہے اس کے طول کو اب اور سطح لاما کے درمیانی زاویہ اور اب کی رقوم میں معلوم کرو۔

فرض کرو کہ خط مستقیم اب سطح مستوی لاما کے ساتھ زاویہ عہ بنتا ہے (ملاحظہ ہو شکل بالا)

اب کو اب کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ

ب ب کو ب پر قطع کرتا ہے۔

تب $\text{ح ب ا ب} = \text{مناظر ح ب و ب} = \text{ع}$

اب مثلث قائم الزاویہ ب ا ب سے $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا ب}} = \text{جم ع}$

لہذا $\text{ا ب} = \text{ا ب} = \text{ا ب} = \text{جم ع}$

نوٹ - جیسے ع صفر سے ۹۰ تک بڑھتا ہے جم ع کی قیمت کم ہوتی جاتی ہے اس سے ظاہر ہے کہ جیسے ا ب کا میلان سطح مستوی کے ساتھ بڑھتا جائے گا اس کا ظل ا ب کم ہوتا جائیگا۔

مشقیں

۱- اگر ایک خط مستقیم ایک سطح مستوی کے متوازی ہو تو ثابت کرو کہ یہ اس سطح مستوی پر اپنے ظل کے بھی متوازی ہوگا۔

۲- ا ب کے طول کا مقابلہ سطح لامہا پر اس کے ظل کے ساتھ کرو جبکہ ا ب

(۱) متوازی ہو سطح مستوی کے

(۲) عمود ہو سطح مستوی پر

(۳) سطح مستوی کے ساتھ ۹۰ کا زاویہ بنائے

۴- ثابت کرو کہ اگر کسی بیرونی نقطہ سے سطح مستوی تک مساوی خطوط اُن کھینچے جائیں تو ان سب کے ظل بھی مساوی ہوتے ہیں۔

۵- ثابت کرو کہ سطح مستوی پر متوازی خطوں کے ظل بھی متوازی ہوتے ہیں کیا اس کی کوئی مشقی صورت ہے؟

۵۔ ایک سطح مستوی پر دو متوازی خطوط مستوی ab اور cd کے
 ظل بالترتیب ab اور cd میں ثابت کر دو کہ
 $ab : cd = ab' : cd'$

مسئلہ اثباتی ۱۵

ایک خط مستقیم ایک مستوی کے باہر واقع ہے اور سطح میں کے
 ایک خط مستقیم کے متوازی ہے، ثابت کر دو کہ ہر دنی خط سطح
 مستوی کے متوازی ہے۔



فرض کر دو کہ ab متوازی ہے cd کے، جو سطح مستوی $abcd$ میں
 واقع ہے۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ ab سطح مستوی $abcd$ کے متوازی ہے
 ثبوت۔ فرض کر دو کہ متوازی خطوط ab اور cd کی
 سطح مستوی $abcd$ ہے، یعنی مستوی سطوح $abcd$ ، $abcd'$ کا خط
 قاطع cd ہے۔

تب اگر خط ab جو سطح مستوی $abcd$ پر واقع ہے سطح مستوی

لاما سے کہیں ملے تو لازماً یہ (اب) خط مستقیم ج د کے کسی نقطہ پر ملے گا۔

لیکن حسب مفروض اب ج د سے کہیں نہیں مل سکتا۔
∴ خط اب سطح مستوی لاما سے بھی کہیں نہیں مل سکتا یا بالفاظ دیگر یہ اس کے متوازی ہے۔

برعکس اس کے اگر ایک خط مستقیم ایک سطح مستوی کے متوازی ہو اور اس خط میں سے گزرنیوالی ایک اور مستوی سطح اول الذکر مستوی کو قطع کرے تو ان سطحوں کا خط تقاطع مفروضہ خط مستقیم کے متوازی ہوگا۔

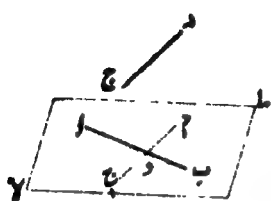
شکل بالا میں فرض کرو کہ خط اب سطح مستوی لاما کے متوازی ہے اور اب میں سے گزرنیوالی سطح مستوی اد کا خط تقاطع سطح مستوی لاما کے ساتھ خط مستقیم ج د ہے یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ ج د اب کے متوازی ہے ثبوت۔ چونکہ خط اب سطح مستوی لاما کے متوازی ہے اسلئے یہ خط ج د سے جو اس سطح مستوی پر واقع ہے کبھی نہیں مل سکتا۔

علاوہ ازیں اب اور ج د دونوں سطح مستوی اد میں واقع ہیں۔

∴ اب متوازی ہے ج د کے

فرع سے دھوج خط معلوم ہیں ثابت کرو کہ کسی ایک خط میں سے ایک ایسی سطح مستوی کھینچی جاسکتی ہے جو دوسرے خط

کے متوازی ہو



فرض کرو کہ ا ب

اور ج د دو موج خط

ہیں یعنی یہ ایسے خط

ہیں جو ایک ہی سطح مستوی

میں واقع نہیں ہوتے

ا ب کے کسی نقطہ و میں سے ج و د ج د کے متوازی کھینچو
تب ا ب اور ج د دونوں کو ایک سطح مستوی لایا کی تعیین
کرتے ہیں اور خط ج د اس سطح کے متوازی ہے کیونکہ یہ ج د کے متوازی
ہے جو اس سطح میں واقع ہے۔

تقریف۔ دو موج خط معلوم ہیں، ان میں سے ایک پر کسی
نقطہ سے دوسرے خط کے متوازی ایک تیسرا خط کھینچا گیا
ہے، ان متقاطع خطوط (پہلے اور تیسرے) کے درمیان جو
زاویہ بنتا ہے وہ موج خطوں کے درمیانی زاویہ کا ناپ
ہوتا ہے۔

مثلاً شکل بالا میں موج خطوط ا ب اور ج د کے درمیانی
زاویہ کا ناپ وہ زاویہ ہے جو ا ب ج د سے بنتا ہے جہاں
ج د خط ا ب کے کسی نقطہ و سے ج د کے متوازی کھینچا گیا ہے۔

مشقیں

۱۔ اگر ایک خط مستقیم ا ب کسی سطح مستوی لایا کے متوازی

ہو تو

(۱) ہر خط مستقیم جو اب کے متوازی ہوگا دو سطح مستوی کے بھی متوازی ہوگا۔

(۲) ہر خط جو سطح مستوی کے متوازی ہوگا وہ اب کے بھی متوازی ہوگا۔

ان دو امور میں سے کوئی ناممکن ہے اور کوئی نا غلط ؟

۲۔ ایک خط مستقیم اب نقطہ کے گرد گردش کرتا ہے اور ہمیشہ سطح مستوی لاہما کے متوازی رہتا ہے ، بتاؤ کہ اب کس سطح کی تکوین کرتا ہے ؟

۳۔ دو متقاطع مستوی سطحیں بالترتیب دو متوازی خطوط اب ج د میں سے گزرتی ہیں ، ثابت کرو کہ متقاطع سطوح کا خط تقاطع اب ج د کے متوازی ہے ۔

۴۔ ایک خط مستقیم دو متقاطع مستوی سطحوں میں سے ہر ایک کے متوازی ہے ، ثابت کرو کہ یہ ان سطحوں کے خط تقاطع کے بھی متوازی ہے ۔

۵۔ ثابت کرو کہ ایک نقطہ مفرد منہ ن میں سے ایک ایسی سطح مستوی کھینچی جاسکتی ہے جو ہر دو موج خطوط اب ج د کے متوازی ہو ۔

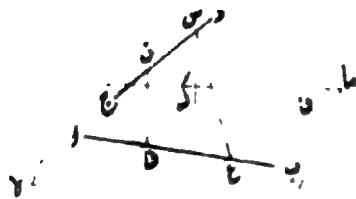
۶۔ ثابت کرو کہ دو موج خطوط میں سے دو ایسی مستوی سطحیں گزر سکتی ہیں جو ایک دوسرے کے متوازی ہوں ۔

مسئلہ اثباتی ۱۶

اگر دو خطوط مستقیم نہ ایک دوسرے کو قطع کریں اور نہ متوازی

میں تو

(۱) ایک خط مستقیم ایسا ہو سکتا ہے جو ان دونوں پر عمود ہو
(۲) اور یہ مشترک عمود ان دونوں خطوں کے درمیان
چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہے۔



فرض کرو کہ اب اور ج د دو مفروضہ کائنات خط میں
(۱) یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ ایک خط مستقیم ایسا ہو گا
جو اب اور ج د دونوں پر عمود ہو۔

اب کے کسی نقطہ ع میں سے ع ف، ج د کے متوازی
کھینچو اور فرض کرو کہ ع ف اور اب کی سطح مستوی لا ما
ہے، نیز فرض کرو کہ ج د کا سطح لا ما پر ق ک
ہے جو اب کو ق پر قطع کرتا ہے اور ن ج د پر کا
وہ نقطہ ہے جس کا ظل ق ہے۔

تب ن ق خطوط اب اور ج د دونوں پر عمود ہو گا۔
ثبوت۔ چونکہ ج د ع ف کے متوازی ہے اس لئے
یہ سطح مستوی لا ما کے بھی متوازی ہے۔

لہذا ج د اپنے ضل ق ک کے بھی متوازی ہے [مسئلہ ۱۱]
 نیز چونکہ ن ق سطح مستوی لا ما پر عمود ہے
 اسلئے زاوئے ن ق ب اور ن ق ک قائمے ہیں
 پس زاویہ ق ن د ایک قائمہ ہے۔

پس ن ق عمود ہے ا ب اور ج د دونوں پر
 (۲) یہ ثابت کرنا ہے کہ ن ق خطوط ج د اور ا ب کے
 درمیان چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہے۔

ج د کے کسی نقطہ میں سے کوئی خط مستقیم س غ ایسا کھینچو
 جو ا ب کو غ پر قطع کرے اور س سے سطح مستوی لا ما پر عمود
 س ک نکالو

تب عمود س ک لازماً خط مائل س غ سے چھوٹا ہوگا [مسئلہ ۱۲]
 ن ق بھی جو اس کے مساوی اور متوازی ہے س غ سے
 چھوٹا ہوگا۔

تعریفیات - (۱) جب دو مستوی سطحیں ایک دوسرے کو
 قطع کریں تو خط تقاطع پر ان کے درمیان دو سطحی زاویہ بنتا ہے
 (۲) اور اس کا ناپ ان دو خطوط مستقیم کا درمیانی زاویہ
 ہوتا ہے جن میں سے ہر ایک خط تقاطع کے کسی نقطہ سے
 ہر سطح میں کھینچا گیا ہو اور ہر ایک خط تقاطع پر عمود ہو۔

مثلاً دو متقاطع مستوی سطحوں ا د اور ب ج کا خط تقاطع
 ا ب ہے اور ا ب پر کے کسی نقطہ ق سے سطح مستوی ا د
 میں ق ر ا ب پر عمود کھینچا گیا ہے اور ق ن سطح مستوی



ب ج میں ا ب پر

عمود کھینچا گیا ہے

پس ان دو مستوی

سطحوں کے درمیان

جو دوسطی زاویہ ہے

اس کا نام پ ہے

ن ق ر ہے

نوٹ۔ (۱) اس تعریف میں ہم نے یہ تسلیم کر لیا ہے کہ نقطہ ق

ا ب پر خود ا کیس لیا جائے زاویہ ن ق ر کی مقدار میں فرق

نہیں آتا اس کی تصدیق مسئلہ ۹ کی مدد سے

افرا ہو سکتی ہے۔

خط تقاطع ا ب پر کے کسی اور نقطہ م سے دونوں سطحوں میں

ا ب پر عمود م ل، م ص کھینچو۔

تب صریحاً ل م، م ص بالترتیب متوازی ہیں ن ق، ق ر کے

ن ل م ص = ن ق ر

(۲) چونکہ ا ب، ن ق اور ق ر دونوں پر عمود ہے اسلئے

ن ق اور ق ر کی سطح مستوی پر بھی عمود ہوگا۔

پس دو متوازی مستوی سطحوں ب ج، ا د کے دوسطی زاوے کی تعیین ان دو

سطحوں کو کسی ایسی مستوی سطح سے کاٹنے سے ہو سکتی ہے جو

ان دونوں سطحوں کے خط تقاطع ا ب پر عمود ہو۔

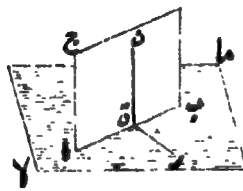
۴۴۔ اگر دو مستوی سطحوں کا دوسطی زاویہ ایک قائمہ کے

برابر ہو تو یہ سطحیں ایک دوسرے پر عمود کہلاتی ہیں



مسئلہ اثباتی ۱۱ [اقلیدس م ۱۱ ش ۱۱]

اگر ایک خط مستقیم ایک سطح مستوی پر عمود ہو تو ہر ایک مستوی سطح جو اس عمود میں سے گزرے مفروضہ سطح مستوی پر عمود ہوگی۔



فرض کرو کہ خط مستقیم ن ق سطح مستوی لا ما پر عمود ہے اور ب ج ایک ایسی سطح مستوی ہے جو عمود ن ق میں سے گزرتی ہے۔
یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ سطح مستوی ب ج سطح مستوی لا ما پر عمود ہے
سطوح مفروضہ لا ما اور ب ج کے خط تقاطع

ہر کوئی نقطہ قی کو اور قی سے سطح لاما میں اب پر عمود قرار
کھینچو۔

ثبوت۔ چونکہ ن ق سطح لاما پر عمود ہے اس لئے یہ خطوط
ق ب، قی ر دونوں پر عمود ہے۔

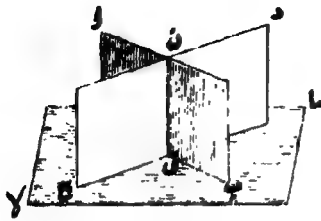
لہذا زاویہ ن قی ر ایک قائمہ ہے نیز چونکہ دو سطحی زاویہ کا
ٹاپ بھی یہی زاویہ ہے کیونکہ خطوط ن قی، قی ر
دونوں خطوط تقاطع اب پر عمود ہیں

یہ سطح مستوی ب ج عمود ہے سطح مستوی لاما پر۔
فروع۔ برعکس اسکے عمل بالا سے ہی یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ
(۱) اگر دو مستوی سطحیں ج ب، لاما ایک دوسرے
پر عمود ہوں اور کوئی خط مستقیم ن ق سطح مستوی ب ج میں
خط تقاطع اب پر عمود کھینچا جائے تو یہ خط سطح مستوی لاما
پر بھی عمود ہوگا۔

(۲) اگر سطح مستوی ب ج سطح مستوی لاما پر عمود ہو اور
پہلی سطح کے کسی نقطہ ن سے دوسری سطح پر عمود ن ق کھینچا
جائے تو ن ق سطح مستوی ب ج میں واقع ہوگا۔

مسئلہ اثباتی ۱۸ [اقلیدس م ۱۱ ش ۱۹]

اگر دو متقاطع مستوی سطحوں میں سے ہر ایک کسی تیسری سطح مستوی
پر عمود ہو تو پہلی دو سطحوں کا خط تقاطع تیسری سطح پر
عمود ہوگا۔



فرض کرو کہ سطوح

مستوی ا ب

اور ج د کا خط

تقاطع ن ق ہو

اور یہ دونوں سطحیں

سطح لا ما پر

عمود ہیں۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ خط ن ق سطح مستوی لا ما

پر عمود ہے۔

ثبوت۔ اگر سطوح ا ب اور ج د کے کسی مشترک نقطہ ن

سے سطح لا ما پر عمود نکالا جائے تو یہ عمود سطوح ا ب اور ج د

میں سے ہر ایک میں واقع ہوگا کیونکہ یہ دونوں سطحیں ا ب

اور ج د سطح لا ما پر عمود ہیں [مسئلہ ۱۱، فرع ۲]

لہذا یہ عمود خط تقاطع ن ق پر منطبق ہوگا یا باضاظ دیگر

ن ق سطح لا ما پر عمود ہے۔

مشقیں

۱۔ کسی مفروضہ خط مستقیم میں سے ایک ایسی سطح مستوی کھینچی جاسکتی ہے

جو ایک مفروضہ سطح مستوی پر عمود ہو

۲۔ ثابت کرو کہ اگر ایک خط مستقیم دو متوازی سطوح مستوی کو قطع

کرے تو یہ ان سطوح کے ساتھ مساوی زاوے بناتا ہے۔

۳۔ اگر ایک سطح مستوی دو اور متوازی سطوح مستویہ کو قطع کرے
تو متانظر دو سطحی زاوے مساوی ہوتے ہیں۔

۴۔ ایک کمرہ کا فرش AB ج CD ہے اور اس کی چھت
 AB ج CD

اگر کمرہ کا طول $AB = 5$ میٹر، عرض $AD = 4$ و 6 میٹر
اور ارتفاع 50 میٹر تو

(۱) سطح AB ج CD اور فرسش

(۲) سطح AB ج CD اور فرش

کے درمیان جو دو سطحی زاوے بنتے ہیں ان کی جیب التمام معلوم کرو۔

۵۔ ایک افقی مربع AB ج CD کے مرکز کے عین اوپر اقامتستانی

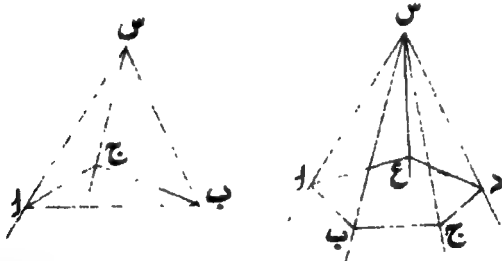
سمت میں ایک نقطہ N ۲ فٹ کے فاصلہ پر واقع ہے، اگر AB کا

طول ۲ فٹ ۲ انچ ہو تو سرچ کی سطح اور سطح AB کے درمیان

جو دو سطحی زاوہ بنتا ہے اس کی جیب التمام معلوم کرو۔

مجسم زاوئے

اگر تین یا زیادہ مستوی سطحوں میں سے ہر ایک بالترتیب اپنے
 مابعدگی سطح کو اس طرح قطع کرے کہ ان سب کے خطوط تقاطع
 ایک دوسرے سے ایک ہی نقطہ پر ملیں تو ان سطحوں سے
 جو زاویہ بنتا ہے اس کو مجسم زاویہ کہتے ہیں، ان سب خطوط
 تقاطع کے مشترک نقطہ کو راس کہتے ہیں، متصل سطحوں کے
 خطوط تقاطع مجسم زاوئے کے کنارے کہلاتے ہیں، متصل
 سطحوں کے درمیان جو زاوئے بنتے ہیں ان کو دو سطحی
 زاویوں سے موسوم کرتے ہیں اور متصل کناروں کے
 درمیان جو مستوی زاوئے بنتے ہیں ان کو رخوں کے زاوئے
 یا طرفی زاوئے کہتے ہیں۔

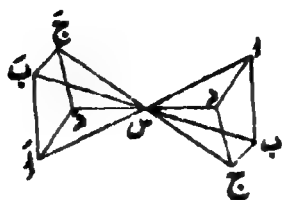


مثلاً اشکالی بالا میں سطوح مستوی 'ا س ب'، 'ب س ج'،
 جو ایک دوسرے کو علی التواتر متراکز کناروں 'س ب'، 'س ج'، ...
 پر کاٹتی ہیں اس میں پر مجسم زاویہ بناتی ہیں۔ مجسم زاویہ کو
 ('س' 'ا ب ج د ع ...') سے یا بعض حرف 'س' سے تعبیر کرتے ہیں

۲۔ تین مشترک مرکز (یا ہم نقطہ) سطوح مستوی سے جو مجسم زاویہ بنتا ہے اس کو سہ سطحی زاویہ کہتے ہیں اور تین سے زیادہ مستوی سطحوں سے جو زاویہ بنتا ہے اس کو کثیر سطحی زاویہ کہتے ہیں اس سہ سطحی زاویہ کے تین طرفی زاویوں اور تین دوسطحی زاویوں کو مجسم زاویہ کے چھ حصے کہتے ہیں۔

اگر دو مجسم زاویے ایک دوسرے پر عین منطبق ہو سکیں یعنی ایک زاویہ دوسرے پر ٹھیک آجائے تو یہ زاویے ایک دوسرے کے ہر طرح سے برابر ہونگے، اس صورت میں ایک مجسم زاویہ کے طرفی زاویے الگ الگ دوسرے مجسم زاویہ کے طرفی زاویوں کے مساوی ہونگے اور ایک مجسم زاویہ کے سب دوسطحی زاویے الگ الگ دوسرے مجسم زاویہ کے دوسطحی زاویوں کے برابر ہونگے بشرطیکہ مجسم زاویوں کے ان حصوں کو دونوں صورتوں میں ایک ہی ترتیب اور سمت میں لیا جائے۔

نوٹ۔ گزشتہ تقریر میں مجسم زاویوں کے حصوں کو ایک ہی ترتیب میں لینا چاہیئے، اس شرط کی ضرورت اس طرح واضح ہوتی ہے۔ ایک مجسم زاویہ کے کناروں کو راس میں سے دوسری جانب خارج کرو، اس طرح سے جو مجسم زاویہ حاصل ہوتا ہے، اس کا مقابلہ پہلے مجسم زاویہ سے کرو۔



یہاں مجسم زدایا (س' ا ب ج د) اور (س' ا ب ج د) کے
حصوں کو اگر اسی ترتیب سے لیا جائے جو حروف سے ظاہر ہے تو
ایک زاویہ کے سب طرفی زاویے اور دوسری زاویے الگ الگ
دوسرے زاویہ کے سب طرفی زاویوں اور دوسری زاویوں کے
مساوی ہیں لیکن اگر ایک شخص ان دونوں زاویوں کے اندر سے
رأس کی جانب دیکھے تو ایک صورت میں تو یہ ترتیب سمت ساعت
کے موافق معلوم ہوگی مگر دوسری صورت میں سمت ساعت
کے مخالف دکھائی دیگی۔

پس اگرچہ ان دونوں صورتوں میں مجسم زاویوں کے سب
اجزاء بالترتیب ایک دوسرے کے مساوی ہیں لیکن باوجود
اس کے یہ زاویے ایک دوسرے پر منطبق نہیں ہو سکتے اس لئے
ان کو ہر طرح سے ایک دوسرے کے مساوی نہیں کہا جاسکتا۔
وہ مجسم زاویے جو ایک دوسرے سے حسب تشریح بالا تعلق
رہتے ہیں متشاکل زاویے کہلاتے ہیں۔

نوٹ ۲۔ اگر دوسری زاویوں (س' ا ب ج د) اور

(س، ا، ب ج) میں ایک کے تین طرفی زاوے ا، س، ب
ب، س، ج، ا ج، س، ا، ب ترتیب دوسرے زاوے کے طرفی
زاویوں ا، س، ب، ا، س، ب، ا، س، ج، ا، س، ب کے برابر
ہوں تو پہلے مجھے زاویہ کے دو طرفی زاوے دوسرے کے دو طرفی
زاویوں کے با ترتیب برابر ہونگے۔



س، ا، ب اور س، ا کے طول باہم مساوی بناؤ
اور سطوح مستوی ا، س، ب اور ا، س، ج میں با ترتیب ا، ب
اور ا، ج، س، ا پر عمود کھینچو۔
نیز سطوح مستوی ا، س، ب اور ا، س، ج میں با ترتیب
ا، ب اور ا، ج، س، ا پر عمود کھینچو
تب \angle ب، ا، ج اور \angle ب، ا، ج متساوی دو طرفی زاویوں
کے ناپ ہیں۔

ب، ج اور ب، ج کو ملاؤ
ثبوت کا خاکہ

مثلثوں کے حسب ذیل زوج باہم مساوی ہیں۔
(۱) \triangle س، ا، ب = \triangle س، ا، ب

زاویہ ب س ا کے مساوی بناؤ اور س د کو س ا کے مساوی کاٹو

سطح مستوی ب س ج میں نقطہ د میں سے کوئی خط مستقیم کھینچو جو س ب، س ج سے بالترتیب ب اور ج پر ملے، اب، ا ج کو ملاؤ۔

ثبوت - چونکہ مثلثات ب س ا اور ب س د ہیں
ب س، س ا بالترتیب مساوی ہیں ب س، س د کے
اور زاویہ ب س ا = \angle ب س د
ب ا = ب د

اب مثلث ب ا ج میں

م حاصل جمع (ب ا + ا ج) بڑا ہے ب ج سے

یعنی بڑا ہے ب د + د ج سے

∴ ا ج بڑا ہے د ج سے

نیز مثلثات ا س ج اور د س ج میں

چونکہ ا س، س ج بالترتیب مساوی ہیں د س، س ج کے

لیکن ا ج بڑا ہے د ج سے

اس لئے زاویہ ا س ج بڑا ہے زاویہ د س ج سے،

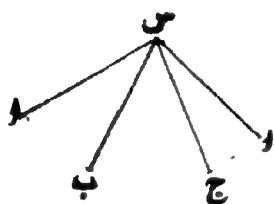
∴ زدایا ا س ب اور ا س ج ٹکڑے ہیں زدایا

ب س د اور د س ج کے مجموعہ سے

یعنی بڑے ہیں زاویہ ب س ج سے

مسئلہ ۱۹ کا تجربی ثبوت

ایک مجموعہ زاویہ بنانے کے لئے تین طرفی زاویوں \angle س ب،
ب س ج اور ج س \angle کو ایک سطح مستوی میں اس طرح کیسپہر



کہ سب سے بڑا زاویہ ب س ج
باقی دو زاویوں کے درمیان واقع

ہو، اب فرض کرو کہ یہ شکل کاغذ
پر سے کاٹ لی گئی ہے۔ اور

س \angle ، س \angle کو ایک دوسرے
پر منطبق کرنے کی غرض سے اس کو

ب س اور س ج پر شکن دیکر تہ کیا گیا ہے۔

اب (۱) اگر \angle ب س \angle + \angle ج س \angle ملکر چھوٹے

ہوں \angle ب س ج سے، تو س \angle اور س \angle ایک دوسرے
پر نہیں لائے جاسکتے اور اس وجہ سے مجموعہ زاویہ نہیں بن سکتا

(۲) اگر \angle ب س \angle + \angle ج س \angle ملکر برابر ہوں

\angle ب س ج کے تو س \angle اور س \angle ایک دوسرے پر لائے تو جاسکتے

ہیں لیکن ایسا کرنے سے س \angle اور س \angle دونوں سطح مستوی

ب س ج میں واقع ہونگے اور اس وجہ سے کوئی مجموعہ زاویہ
نہیں بن سکیگا۔

(۳) اگر \angle ب س \angle + \angle ج س \angle ملکر بڑے ہوں

\angle ب س ج سے تو جب س \angle اور س \angle کو سطح مستوی ب س ج

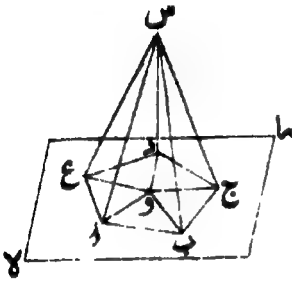
میں لایا جائے گا تو یہ ایک دوسرے سے تجاوز کر جائیں گے،
لہذا ان کو سطح مستوی ب س ج کے باہر ایک دوسرے
پر منطبق کیا جاسکتا ہے یعنی اس صورت میں ایک مجسم زاویہ
بن سکتا ہے۔

مشقیں

- ۱۔ ثابت کرو کہ بالعموم تین مستوی سطحیں ایک نقطہ پر ملتی ہیں
اس کی تین مستثنیٰ صورتیں بتاؤ۔
- ۲۔ ثابت کرو کہ ایک موج ذوار بعتہ الاضلاع کے چار زاویوں
کا مجموعہ ہمیشہ ۳۶۰° سے کم ہوتا ہے۔
- ۳۔ ایک نقطہ مفروضہ سے تین خط 'ا'، 'ب'، 'ج' کھینچے
گئے ہیں جو ایک ہی سطح مستوی میں واقع نہیں ہوتے اور اس مجسم
زاویہ کے اندر جس کی تعین خطوط مستقیم 'ا'، 'ب'، 'ج' سے
ہوتی ہے ایک اور خط مستقیم 'د' کھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ
(۱) زوایا 'ا'، 'ب'، 'ج' اور 'د' کا مجموعہ زوایا
'ا'، 'ب'، 'ج' اور 'د' کے نصف مجموعہ سے زیادہ ہے
(۲) زوایا 'ا'، 'ب'، 'ج' اور 'د' کا مجموعہ زوایا 'ا'، 'ب'، 'ج' اور
'د' کے مجموعہ سے کم ہے۔
- (۳) زوایا 'ا'، 'ب'، 'ج' اور 'د' کا مجموعہ زوایا
'ا'، 'ب'، 'ج' اور 'د' کے مجموعہ سے کم ہے۔

مسئلہ اثباتی ۲۰ [قلیدس م ۱۱ ش ۲۱]

ایک محدب مجسم زاویہ میں طرفی زاویوں کا مجموعہ چار قائمہوں سے کم ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ (س ا ب ج د ع)

ایک محدب مجسم زاویہ ہے۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے

کہ طرفی زاویوں ا س ب

ب س ج ، ج س د ،

د س ع ، ع س ا کا حاصل

جمع چار قائمہوں سے کم ہے۔

ایک سطح مستوی لایا کہینچو جو طرفی زوایا کی مستوی سطحوں کو خطوط مستقیم ا ب ، ب ج ، ج د ، د ع ، ع ا پر قطع کرے اور اس طرح اسے ایک محدب کثیر الاضلاع ا ب ج د ع بنائے۔

کثیر الاضلاع ا ب ج د ع کے اندر ایک نقطہ و لو اور و ا ، و ب ، و ج ، و د ، و ع کو ملاؤ۔

ثبوت - سطحی زاویہ ا میں حاصل جمع د س ا ب

+ د س ا ع بڑا ہے د ع ا ب سے

یعنی بڑا ہے د و ا ع + د و ا ب سے [مسئلہ ۱۹]

اسی طرح سے ہر ایک راس زاویہ ب ج د ع کے لئے۔

لہذا جن مثلثوں کے راس نقطہ میں ہیں ان کے قاعدوں پر کے زاویوں کا مجموعہ بڑا ہے ان تمام مثلثوں کے قاعدوں پر کے زاویوں کے مجموعہ سے، جن کے راس نقطہ و پر ہیں اور چونکہ دونوں صورتوں میں مثلثوں کی تعداد ایک ہی ہے اس لئے دونوں صورتوں میں تمام زاویوں کے مجموعے بھی مساوی ہونگے اس سے معلوم ہوتا ہے کہ میں پر کے سب زاویوں کا مجموعہ و پر کے سب زاویوں کے مجموعہ سے کم ہے۔ لیکن و پر کے سب زاوے چار قائموں کے برابر ہیں اس لئے میں پر کے سب زاویوں کا مجموعہ چار قائموں سے کم ہے۔

(متفرق) متقیں

۱۔ ایک مائل خط اور سطح مستوی کے نقطہ تقاطع میں سے اس سطح میں دو خط کھینچ گئے ہیں جن میں سے ایک تو خط مائل کا ضلع ہے اور دوسرا کوئی اور خط، ثابت کرو کہ مائل اور اس کے ضلع کا درمیانی زاویہ، مائل اور دوسرے خط کے درمیانی زاویہ سے چھوٹا ہوتا ہے۔

۲۔ بتاؤ کہ ایک سطح مائل میں اس کے کسی نقطہ میں سے ایسا خط کس طرح کھینچا جاسکتا ہے جو افقی سطح سے بڑے سے بڑا زاویہ بنائے۔

۳۔ ایک سطح مستوی میں ایک ثابت نقطہ و ہے اور اس کے باہر ایک اور ثابت نقطہ ن ہے، اگر نقطہ ن میں سے ان تمام

خطوں پر عمود نکالے جائیں جو نقطہ و سے سطح مستوی میں کھینچے جاسکتے ہیں تو ان عمودوں کے پایوں کا طریق دریافت کرو۔

۴۔ ایک نقطہ A سے دو متقاطع مستویات پر عمود AN ، AO کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ

(۱) مستویات کا خط تقاطع AO ، AN کی سطح مستوی پر عمود ہے

(۲) متقاطع سطوح کا دو سطحی زاویہ، عمودوں کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہے یا اس کا مکمل ہے۔

۵۔ اگر AB ، CD دو موج خط ہوں تو ثابت کرو کہ خطوط AB ، CD بھی موج ہونگے۔

ان موج خطوط AB ، CD کے ظل کن مستوی سطحوں پر ایک دوسرے کے متوازی ہونگے؟

۶۔ ثابت کرو کہ فضا کے کسی دئے ہوئے نقطہ میں سے صرف ایک ہی خط کھینچا جاسکتا ہے جو دو مفروضہ موج خطوں میں سے ہر ایک کو قطع کرے۔

۷۔ OA ، OB ، OC تین متراکز خطوط مستقیم ہیں اور ان میں سے ہر ایک باقی دو پر عمود ہے، ثابت کرو کہ

(۱) اگر O لا، OM ، ON بالترتیب OB ، OC ، OA پر عمود ہوں تو مثلث OMN ، مثلث ABC کا مثلث پائیں ہوگا

(۲) اگر AB ، CD کی سطح مستوی پر عمود ON نکالا جائے تو ON مثلث ABC کا مرکز عمودی ہوگا۔

۸۔ AB ، CD ایک سطح مائل ہے اور اس سطح میں AB ، CD

افقی خط ہیں، اور ا د، ب ج خطوط میلان اعظم ہیں
 سینر ا د، ب ج کے غل افقی سطح پر بالترتیب ا ف، ب ع
 ہیں



اگر $\angle ج ب ع = ۹۰^\circ$

$\angle د ا ج = ۹۰^\circ$

$\angle ج ا ع = ۹۰^\circ$

$\angle ف ا ع = ۹۰^\circ$

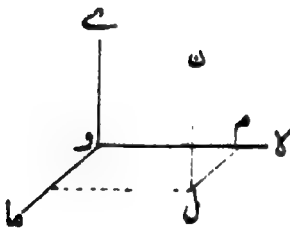
ثوابت کر دو کہ

(۱) جب ط = جب ع = حجم بہ (۲) مس ف = مس بہ = مس بہ = مس بہ

(۳) مس ع = مس ط = مس ف = جب بہ = جب ف = حجم ط

حوالہ کے محوروں کے ذریعہ فضا میں کسی نقطہ کے مقام

کا تعین



فرض کر دو کہ 'ولا' و 'وما'

دو ثابت مستقیم خط ہیں

جو ایک دوسرے کو مس کرتے

و پر علی امتوا تم قطع کرتے

ہیں، 'ولا' و 'وما' کی سطح

مستوی پر و سے عمود

کھینچو تب خطوط 'ولا' و 'وما'

نویسے میں سے ہر ایک باقی دو خطوط پر اور اس لئے ان کی سطح

مستوی پر عمود ہے، خطوط ولا، وما، وے کو حوالہ کے لئے محور قرار دیتے ہیں اور کسی نقطہ کے محل کا یقین بلحاظ ان محوروں کے حسبِ قیاس طریقہ سے کیا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ نقطہ ن کا غل سطح مستوی لا وما پر مل رہا ہے نیز فرض کرو کہ نقطہ ل کے محدود بلحاظ محاور ولا، وما کے وم، م مل ہیں اور لا، ما، ی بالترتیب وم، م مل، ل ن کے طولوں کو تعبیر کرتے ہیں، تب وم، م مل، ل ن کو نقطہ ن کے محدود کہتے ہیں۔

نقطہ ن کو (لا، ما، ی) سے تعبیر کرتے ہیں اور اگر (لا، ما، ی) کی عددی قیمتیں معلوم ہوں تو نقطہ ن کا محل معلوم ہو سکتا ہے۔
مثال ۱۔ ایک نقطہ کے محدود ۵، ۳، ۴ ہیں، نقشہ پر نقطہ کے مقام کی نشان دہی کرو۔

پہلے بلحاظ محاور ولا، وما کے اُس نقطہ کی نشان دہی کرو جس کے محدود ۵، ۳ ہیں، اس نقطہ کا نام ل رکھو اور ل ن سطح مستوی لا وما پر عمود کھینچو اور اس کے طول کو چار اکائیوں کے مساوی بناؤ، اس طرح نقطہ ن کا محل معلوم ہو گیا۔

ظاہر ہے کہ نقطہ ن کے محدود دراصل اس کے فاصلے ہیں حوالہ کی سطوح مستوی ما وے، وے ولا، لا وما سے، اب یہ سطحیں فضا کو آٹھ حصوں میں تقسیم کرتی ہیں اور ان سب حصوں میں ایک ایک نقطہ ایسا ہے جن کے فاصلے ان سطوح مستوی سے ۵، ۳، ۴ ہیں، ان سب نقطوں کے محدودوں کو ان اصولوں

کے مطابق جن کی تشریح پہلے ہو چکی ہے مثبت اور منفی علامتوں کے ذریعہ تمیز کیا جاتا ہے۔

جو خط محاور ولا، و ما، وے پر یا ان کے متوازی ان سمتوں میں پائے جائیں جو ان محاور کے حروف سے ظاہر ہوتی ہیں وہ مثبت خطوط کہلاتے ہیں اور جو ان محاور پر یا ان کے متوازی مقابل سمتوں میں ناپے جائیں وہ منفی خطوط کہلاتے ہیں

مشقیں

۱۔ ذیل کے نقطوں کے محل شکل میں دکھاؤ۔

(۱) (۳، ۵) (۲) (۵، ۷) (۳)

(۳) (۳، ۴، ۵) (۴) (۴، ۵، ۳)

۲۔ ایک نقطہ ن کے محدد (۶، ۸، ۱۰) ہیں، ون کے وسطی نقطہ ق کے محدد معلوم کرو۔

۳۔ اگر کسی نقطہ ن کے محدد (لا، ما، ی) ہوں تو ثابت کرو کہ ون = لا + ما + ی

اگر نقطہ ن (۳، ۴، ۱۲) ہو تو ون کا طول معلوم کرو۔

محکم اشکال

۱۔ اگر ایک مستوی شکل کو متساوی الفصل، متوازی المستقیم

خطوں سے کاٹ کر

چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں

میں تقسیم کیا جائے اور

ان خطوں میں سے

دو دو کو علی التسلل

لینے سے مستطیل بنائے

جائیں جیسا کہ اس شکل میں کیا گیا ہے تو ہم ان ٹکڑوں کے

عرض کو لا انتہا کم کرنے سے شکل مفروضہ اور خطوط مستقیم

سے بنی ہوئی باہر کی شکل کے رقبوں کے تفاوت کو جتنا چاہیں

کم کر سکتے ہیں، بالفاظ دیگر شکل مفروضہ کا رقبہ ایسے سب

مستطیلی ٹکڑوں کے مجموعہ کی انتہائی قیمت کے مساوی خیال

کیا جاسکتا ہے جبکہ ان ٹکڑوں کے عرض کو لا انتہا کم کر دیا

جائے۔

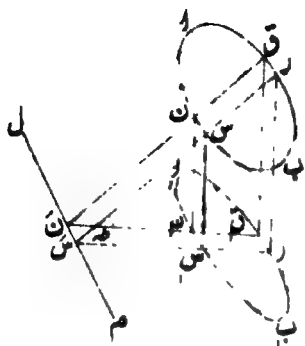
۲۔ اگر $A B$ ایک مستوی شکل ہو اور اس کا غل کسی

اور مستوی سطح پر جو $A B$ کی سطح سے زاویہ θ بنائے

$A B$ ہو تو

غل $A B$ کا رقبہ = شکل $A B$ کا رقبہ $\times \cos \theta$

فرض کرو کہ ان سطحوں کا خط تقاطع $L M$ ہے،



شکل ۱ ب کو ایسے متوازی
خطوط کے ذریعہ جو سب
کے سب ل م پر عمود
ہوں چھوٹے چھوٹے
ٹکڑوں میں تقسیم کرو۔
فرض کرو کہ اس
قسم کا ایک ٹکڑا

ن ق رس ہے اور اس کا ض ن ق ر س ہے۔

اب اگر ن ق رس کے عرض کو اور اس طرح ن ق ر س
کے عرض کو نہایت کم کر دیا جائے تو انتہائی صورت میں دونوں
ٹکڑے مستطیل شکل کے ہونگے اور ان دونوں کا عرض ایک
ہی (یعنی ن س) ہوگا

نیز چونکہ ن ق کا طول = ن ق جم ط

اس لئے ن ق ر س کا رقبہ = ن ق رس کا رقبہ × جم ط

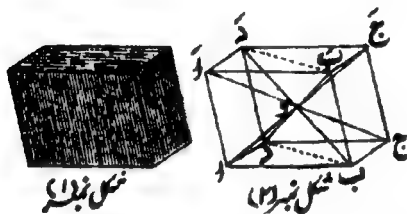
اسی طرح سے متناظر ٹکڑوں کے ہر زوج کے لئے
یہی ربط درست ہوگا جبکہ ان کے عرض کو لا انتہا کم کر دیا جائے
: شکل ۱ ب کا رقبہ = شکل ۱ ب کا رقبہ × جم ط

۳۔ ایک مجسم شکل یا محض مجسم سے فضا کا وہ حصہ مراد ہے
جو ایک یا ایک سے زیادہ مستوی یا منحنی سطحوں سے گھرا
ہوگا ہو۔ ان سطحوں کو مجسم کے رخ کہتے ہیں اور ہر دو
متصل رخنوں کا خط تقاطع کنارہ کہلاتا ہے۔

۴۔ کثیر السطوح سے مراد وہ مجسم ہے جو سطوح مستوی سے گھرا ہوا ہو۔

نوٹ۔ ایک مستوی مستقیم الاضلاع شکل میں ضروری ہے کہ کم از کم تین مستقیم خط ہوں، لیکن اگر دو خط متوازی ہوں تو کم از کم چار خط ہونے چاہئیں، اسی طرح سے ایک کثیر السطوح میں ضروری ہے کہ کم از کم چار سطحیں یا رخ ہوں لیکن اگر دو رخ متوازی ہوں تو کم از کم پانچ رخ ہونے چاہئیں۔

۵۔ متوازی السطوح وہ مجسم ہے جو متوازی سطوح مستوی کے تین زوجوں سے گھرا ہوا ہو۔



شکل ۲ میں سطح مستوی ا ب ا ب دو متوازی سطح مستوی ا ب ج د اور ا ب ج د کو قطع کرتی ہے اسلئے کنارے ا ب ا ب باہم متوازی ہیں۔ [مسئلہ ۱۱]

اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ (۱) متوازی السطوح کے چار رخوں میں سے ہر ایک رخ ایک متوازی الاضلاع ہے (۲) مقابل کے رخ ہر لحاظ سے ایک دوسرے کے مساوی ہیں اور (۳) ہر کنارے چار کناروں کے تین جڑوں میں منقسم ہوتے ہیں اور ہر ایک جڑ

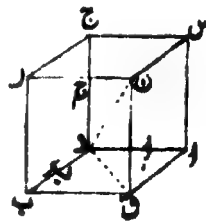
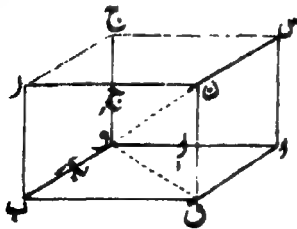
کے چار کنارے ایک دوسرے کے متوازی اور برابر ہیں۔
۶۔ ایک متوازی السطوح کے چار قطر ایک ہی نقطہ میں
سے گزرتے ہیں اور ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔
فرض کرو کہ متوازی السطوح (ا ب ج د، ا ب ج د)
کے قطر ا ج، ب د، ج ا، اور د ب ہیں

ب د، ب د کو ملاؤ
ثبوت۔ چونکہ ب ب، د د ایک دوسرے کے متوازی
اور مساوی ہیں اس لئے شکل ب د ب د متوازی الاضلاع
ہے۔

∴ اس کے قطر ب د، د ب ایک دوسرے کی تنصیف
کرتے ہیں یعنی خط ب د، د ب کے وسطی نقطہ و میں سے
گزرتا ہے۔

اسی طرح سے حسب سابق د ا اور ب ج کو لانے سے
یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ا ج، د ب کے وسطی نقطہ و میں سے
گزرتا ہے، اسی طرح سے ا ج کی تنصیف و پر ہوتی ہے۔

۷۔ جس متوازی السطوح کے رخ مستطیل شکل کے ہوں اس کو



مکعب نما یا مستطیل مجسم کہتے ہیں، اگر اس کا ہر ایک رخ مربع ہو تو متوازی السطوح کو مکعب کہتے ہیں۔

اشکال بالا میں Δ ج و Δ اور Δ ج و ب دونوں قائمے ہیں
 \therefore خط وج رخ Δ ب پر عمود ہے۔

اسی طرح سے ہر ایک کنارہ ان دو سطحوں پر عمود ہے جن کو یہ قطع کرتا ہے اور ہر ایک رخ ان چار رُخوں پر عمود ہے جنکو یہ قطع کرتا ہے۔

۸۔ ایک مستطیل مجسم کے قطر کا مربع اس کے تین متراکز کناروں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مکعب نما کے تین متراکز کنارے Δ و Δ و ب وج ہیں جن کے طول بالترتیب Δ ، ب، ج ہیں اور اس کا قطر و ن ہے۔

وق کو ملاؤ۔

تب چونکہ ن ق عمود ہے رخ Δ ب پر اس لئے یہ وق پر بھی عمود ہے

$$\therefore \text{ون}^2 = \text{وق}^2 + \text{نق}^2 = \text{وق}^2 + \text{ج}^2$$

$$\text{لیکن وق}^2 = \Delta^2 + \Delta^2 = \Delta^2 + \Delta^2$$

کیونکہ Δ و Δ قائمہ ہے

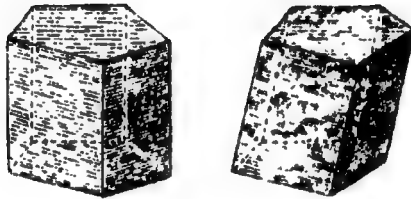
$$\therefore \text{ون}^2 = \Delta^2 + \Delta^2 + \text{ج}^2$$

فرع ۱۔ ایک مکعب نما کے سب قطر باہم مساوی ہوتے ہیں

فرع ۲۔ اگر ایک مکعب کا ہر ایک کنارہ Δ ہو

$$\text{تو قطر}^2 = 3\Delta^2 \therefore \text{قطر} = \Delta\sqrt{3}$$

نوٹ۔ اگر کسی نقطن کے عمود (لأی) سے تغیر کئے جائیں اور نقطہ
و مبدأ ہر دو "ون" = لا + ما + ی
۹۔ منشور وہ مجسم ہے جو ایسی متوازی سطحوں سے گھرا ہوا ہو جن میں
سے دو سطحیں (جو منشور کے سرے کہلاتی ہیں) ایک
دوسرے کے متوازی اور ہر طرح سے مساوی
ہوں اور باقی (جن کو طرفی رخ یا پہلو کہتے ہیں) شکل میں متوازی
الاضلاع ہوں۔



ایک منشور کے سرے مختلف، ذواربعۃ الاضلاع اور کسی متعدد اضلاع
کی اشکال کثیر الاضلاع ہو سکتی ہیں اور ان پر جو منشور بنتے ہیں۔
ان کو بالترجیب مختلف، ذواربعۃ الاضلاع یا کثیر الاضلاع منشور کہتے ہیں
ہر منشور کے طرفی کنارے مساوی اور متوازی ہوتے ہیں، جس
منشور کے طرفی کنارے اس کے سروں پر عمود ہوں اس کو قائم
منشور کہتے ہیں، ایسے منشور کے طرفی رخ شکل میں مستطیل ہوتے
ہیں، باقی سب کو مائل منشور کہتے ہیں۔

متوازی السطوح منشور کی ایک خاص صورت ہے اور کعب خاصہ

کعب، قائم منشوروں کی خاص صورتیں ہیں۔

مسئلہ ۱۱ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ منشور کی مستوی تراش جو ایک

سرے کے متوازی ہو وہ ہر سرے کے ہر طرح سے مساوی ہوتی ہے

۱۔ مخروط مضلع وہ مجسم ہے جو مستوی سطحوں سے گھرا

ہوا ہو جن میں سے ایک سطح جس کو قاعدہ کہتے ہیں کوئی مستقیم

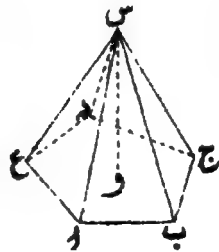
الاضلاع شکل ہو اور باقی سطحیں مثلث ہوں جن کے راس

ایک ہی نقطہ پر قاعدہ کی سطح کے باہر واقع ہوں۔

اگر ایک مخروط مضلع کا قاعدہ کوئی منتظم کثیر الاضلاع واجب جودع

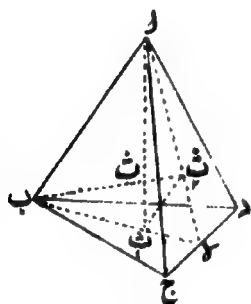
ہو اور اس کا راس اس خط پر واقع ہو جو قاعدہ کے

وسطی نقطہ و (یعنی اندرونی یا بیرونی دائرہ کے مرکز) سے قاعدہ پر



مورد ہو تو مخروط مضلع کو قائم مخروط مضلع کہتے ہیں۔

۱۱۔ ذواربعتہ السطوح (چار سطی) وہ مخروط منقطع ہے جسکا قاعدہ ایک مثلث ہو۔ ظاہر ہے کہ پانچویں رخ اس مجسم کا احاطہ کرتے ہیں
۱۲۔ وہ چار خطوط مستقیم جو ذواربعتہ السطوح کے ہر ایک راس کو اس کے مقابل کے رخ کے ہندسی مرکز سے ملاتے ہیں وہ سب کے سب ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور یہ نقطہ ان میں سے ہر ایک کو نسبت ۱:۳ میں تقسیم کرتا ہے۔



ایک ذواربعتہ السطوح
(ا، ب ج د) میں فرض کرو
کہ ان رخوں کے ہندسی مرکز
جو رؤس الزوایا ا، ب، ج، د
کے مقابل ہیں بالترتیب
ث، ث، ث، ث ہیں
نہایت یہ کرنا چاہئے کہ

ب، ث، ج، ث، د، ث، ا، ث
کنا رہ ج د کا وسطی نقطہ لاؤ ب، ث اور ث، لاؤ ا، ث اور ا، لا
پر بالترتیب واقع ہونگے اور ب، لا = ۳، ث، لا،
نیز ا، لا = ۳، ث، لا

لہذا ث، ث، ا، ب کے متوازی ہے
نیز ا، ث، ب، ث، د، ث، ا کے متوازی ہے
کیونکہ یہ دونوں سطح مستوی ا، ب میں واقع ہیں۔ اگر ان
کا نقطہ تقاطع ث ہو تو متشابه مثلثوں سے

ا ث : ث ث = ا ب : ث ث

= ا لا : لا ث = ۱ : ۳

ب ث، ا ث کو ایک ایسے نقطہ ث ف پر قطع کرتا ہے جس کا فاصلہ ث ف سے = $\frac{1}{3}$ ا ث

اسی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ج ث، د ث دونوں ا ث کو اسی نقطہ پر قطع کرتے ہیں، یعنی یہ سب خطوط ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں

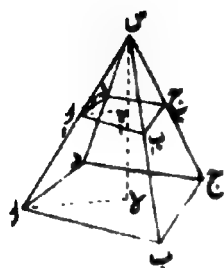
مشق تین خطوط مستقیم جو ایک ذرا بہتہ اسطوح کے مقابل کے کناروں کے وسطی نقطوں کو لاتے ہیں ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

[فرض کرو کہ ج د، ا ب، ب ج کے وسطی نقطے بالترتیب لا، ما، مے، ہ ہیں، پہلے مسئلہ ۸ مشق ۲ کی رو سے ثابت کرو کہ شکل لا، ما، مے، ہ ایک متوازی الاضلاع ہے، پھر اس کے قطروں پر غور کرو]

۱۳۱۔ (۱) قاعدہ کے متوازی مخروط مضلع کی کوئی مستوی تراش قاعدہ کے متشابه ہوتی ہے

(۲) ایسی کسی تراش کا رقبہ اُس فاصلہ کے مربع کے تناسب ہوتا ہے جو اُس تراش کا مخروط مضلع کے راس سے ہو۔

فرض کرو کہ مخروط مضلع (س، ا ب ج د) میں تراش (ا ب ج د) قاعدہ (ا ب ج د) کے متوازی ہے۔



(۱) چونکہ سطوح مستوی
 ا ب ج د اور ا ب ج د
 متوازی ہیں اور سطح مستوی
 ا ب ج د ان دونوں کو
 قطع کرتی ہے اس لئے خطوط
 تقاطع ا ب ج د متوازی
 ہیں۔

اسی طرح سے ب ج ج ا ب ج
 اور ج د ج د اور د ا متوازی ہیں۔
 لہذا اشکال ا ب ج د اور ا ب ج د کے متناظر نائے
 برابر ہیں۔

اور متشابه مثلثوں سے $\frac{ا ب}{ب ج} = \frac{ب ج}{ج د} = \frac{ج د}{د ا}$
 لہذا اشکال ا ب ج د اور ا ب ج د ایک دوسرے
 کے متشابه ہیں۔

(۲) فرض کرو کہ اگر رأس س میں سے قاعدہ پر عمود
 کھنڈا جائے تو یہ عمود تراش ا ب ج د سے کلا پر
 و ب ج د سے کلا پر ملتا ہے، لہذا، لہذا کو ملاؤ
 تب شکل ا ب ج د : شکل ا ب ج د
 $= ا ب : ا ب$

$= س ا : س ا$ [متشابه مثلثوں سے]

= ص لا : ص لا

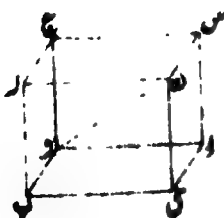
نتیجہ صریح۔ اگر دو مضلع مخروطوں کے ارتفاع اور اس کے قاعدوں کے رقبے باہم مساوی ہوں تو مضلع مخروطوں کی ان تراشوں کے رقبے جو قاعدوں کے متوازی ہوں اور جن کے فاصلے دسوں سے برابر ہوں باہم مساوی ہوں گے۔

مشقیں

۱۔ نوچے کی ایک مربع چادر کا ہر ایک ضلع ۱۲ فٹ ہے اس کو ایک دیوار کے ساتھ اس طرح کھڑا کیا گیا ہے کہ اس کا زاویہ میلان افقی کے ساتھ ۹۰ درجہ ہے، بتاؤ کہ زمین کے کس قدر رقبہ کو یہ انتظامی سمت کی بارش سے محفوظ رکھ سکتا ہے؟

۲۔ (۱۱) ذیل کے مستطیل مجسم میں $DA = 12$ سنٹی میٹر، $DB = 9$ سنٹی میٹر، $OC = 8$ سنٹی میٹر۔ DN ، HN اور شکل DN کے رقبہ کی قیمتیں دریافت کرو۔

(۲) اگر ON خطوط DA ،



DB ، OC کے ساتھ بالترتیب

زاوے E ، B ، C بنائے تو

ثابت کرو کہ OC ، DB ، DA ، DN کے

اور ان خطوط کی جو قیمتیں

اوپر مسدود ہیں ان کے

کاما سے اس نتیجہ کی تصدیق کرو۔

(۳) دن میں سے گزرنے والی کوئی سطح مستوی ب ق کے

متوازی ہے؟

اگر وہ = د، دب = ب، وج = ج تو ثابت کرو کہ
دن اور ب ق کے درمیان چھوٹے چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ

ب ج ہے۔

کاب + ج اگر ایک متوازی اسطوح کو ایک ایسی سطح مستوی سے کاٹا جائے
جو اس کے متقابل رخوں کے دوزدجوں کو قطع کرے تو ثابت کرو کہ
خطوط تقاطع ایک متوازی الاضلاع بناتے ہیں۔

۴۔ ثابت کرو کہ وہ اشکال کثیر الاضلاع جو کسی منشور کو متوازی
سطوح مستوی سے کاٹنے سے حاصل ہوتی ہیں ہر طرح سے ایک
دوسرے کے مساوی ہوتی ہیں۔

۵۔ اگر ایک ذواربنتہ اسطوح کا ہر ایک کنارہ مقابل کے کنارے
کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ ہر کونے پر کے تین مستوی زاویوں کا مجموعہ
۱۸۰ کے برابر ہے۔

۶۔ دو مستوی سطحیں ایک دوسرے کو ۴۵° کے زاویہ پر کاٹتی ہیں
اور ایک سطح پر ۵ سنتی میٹر کے نصف قطر کا دائرہ کھینچا گیا ہے اور
اس کا غل دوسری مستوی سطح پر بنایا گیا ہے۔

(۱) غل کے سب سے بڑے وتر کا طول اور (۲) غل کا رقبہ
دریافت کرو۔

۷۔ اگر ایک ذواربنتہ اسطوح کو ایک سطح مستوی سے کاٹا جائے

جو اس کے مقابل کے کسی دو کناروں کے متوازی ہو، تو ثابت کرو کہ تراش متوازی الاضلاع ہوگی۔

۸۔ ثابت کرو کہ ایک منظم ذواربعتہ اسطوح کے مقابل کے کناروں کا چھوٹے سے چھوٹا حاصل اس مربع کے قطر کا نصف ہوگا جو مجسم مذکور کے ایک کنارہ پر بنایا جائے۔

۹۔ اگر ایک ذواربعتہ اسطوح میں مقابل کے کناروں کے دو زوج ایسے ہوں کہ ہر زوج کے کنارے آپس میں زاویہ قائمہ بنائیں تو ثابت کرو کہ تیسرے زوج کے کنارے بھی آپس میں زاویہ قائمہ بنائیں گے۔

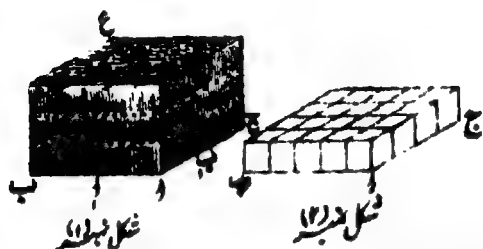
۱۰۔ اگر ایک ذواربعتہ اسطوح میں مقابل کے کنارے ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں تو مقابل کے کناروں کے مربعوں کا مجموعہ ہر زوج کی صورت میں وہی ہوگا۔

سطحیں اور حجم

۱۴۔ کسی مجسم کے حجم سے فضا کا وہ حصہ مراد ہوتا ہے جو مجسم کے احاطہ کرنے والی سطحوں کے اندر گھرا ہوا ہو۔

ایک مکعب اینچ ایک ایسے مکعب کے حجم کو تعبیر کرتا ہے جس کے ہر کنارے کا طول ایک اینچ ہو، اسی طرح ایک مکعب سنتی میٹر ایک ایسے مکعب کے حجم کو تعبیر کرتا ہے جس کے ہر کنارے کا طول ایک سنتی میٹر ہو، پس حجم کی اکائی سے مراد ایک ایسے مکعب کا حجم ہے جس کا ہر کنارہ طول کی ایک اکائی کے برابر ہو۔

۱۵۔ ایک مستطیلی مجسم کی سطح اور حجم دریافت کرو۔



سطح۔ فرض کرو کہ شکل (۱۶) کے کعب نما میں طول a ب = a اکائیاں
عرض b ج = b اکائیاں اور ارتفاع c د = c اکائیاں
اب مجسم کی کل سطح مقابل کے مساوی مستطیل رخنوں
کے عین زوجوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

لیکن a ، b ، c ، d ج رخنوں میں بالترتیب a ، b ،
 a ، b ، c ج رقبہ کی اکائیاں شامل ہیں۔
∴ مجسم کی کل سطح = $2ab + 2ac + 2bc$ ج رقبہ
کی اکائیاں۔

اگر $a = b = c$ 'ج' تو مستطیلی مجسم ایک کعب بن جاتا
ہے جس کے ہر کنارے میں طول کی a اکائیاں ہوتی ہیں
سطح کعب کی کل سطح = $6a^2$ رقبہ کی اکائیاں
مجسم۔ ایک کعب نما پر غور کرو جس کا طول a ب = a رقبہ،
عرض b ج = a رقبہ، ارتفاع c د = a رقبہ، شکل (۱۷)
سے ظاہر ہے کہ مجسم مذکور عین مساوی قاسموں میں منقسم

ہو سکتا ہے جن میں سے ہر قاش کی موٹائی ایک انچ ہے ،
 نیز ہر قاش کو پھر (دیکھو شکل ۲) کعبی ٹکڑوں میں تقسیم کر سکتے
 ہیں جن میں سے ہر ٹکڑے کے مساوی کنارے ایک ایک
 انچ ہیں ، پس ہر ٹکڑا ایک کعب انچ کے برابر ہوگا ۔

اب ایک قاش میں کعب انچوں کی تعداد $۴ \times ۵ = ۲۰$ ہے

پس کل مجسم میں کعب انچوں کی تعداد $۶ \times ۳ \times ۴ \times ۵ = ۶۰$

اسی طرح سے اگر طول = ا خطی اکائیاں

عرض = ب خطی اکائیاں

ارتفاع = ج خطی اکائیاں

تو مستطیلی مجسم میں حجم کی $ا \times ب \times ج$ اکائیاں ہوں گی

اور اگر ایک کعب ہر ایک کنارہ = ا خطی اکائیاں

تو اس کعب میں $ا^۳$ حجم کی اکائیاں ہوں گی ۔

یہ مقہوم اختصاراً اس طرح ادا کیا جاتا ہے

(۱) کعب نما کا حجم = طول \times عرض \times ارتفاع (۱)

(۲) = قاعدہ کا رقبہ \times ارتفاع (۲)

(۳) کعب کا حجم = (کنارہ) ۳ (۳)

فرع۔ ایک کعب نما (ا ب ج د، ا ب ج د، ا ب ج د)

کو اس کی قطری سطح

مستوی ب د س ق د

ایسے قائم منشوروں میں تقسیم کرتی

ہے جن کے قاعدے متطابق



قائم الزاویہ مثلث میں اور نیز یہ دونوں منشور ہر لحاظ سے ایک دوسرے کے مساوی ہیں اور ہر ایک کا حجم پورے مکعب نامہ کے حجم کا نصف ہے۔
مشقیں

۱۔ ایک کمرہ کے طول عرض اور بلندی میں بالترتیب ایک اور ج اکائیوں شامل ہیں، ثابت کرو کہ چار دیواروں میں رقبہ کی ۲ ج (۱+۱) اکائیوں ہوں گی، اگر چار دیواروں کا رقبہ ۶۰ یا ۸۶ مربع میٹر ہو اور بلندی ۳ میٹر، تو فرش کا مجموعہ اضلاع معلوم کرو۔

۲۔ اگر ایک حوض کی لمبائی چوڑائی اور گہرائی بالترتیب ۱۲۵ سنی میٹر ۸۰ سنی میٹر اور ۶۵ سنی میٹر ہو، تو اس کی گنجائش میٹروں میں دریافت کرو، نیز اس پانی کا وزن کلوگراموں میں دریافت کرو جو حوض کے پچھلے حصہ کو بھر سکے۔

۳۔ ایک خاص مقام پر سالانہ بارش ۶۵ سنی میٹر ہوتی ہے۔ بتاؤ کہ یہ فی ہیکٹر کتنے لیٹروں کے مساوی ہے؟

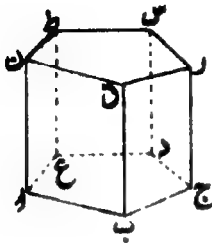
۴۔ سنگ مرمر کے ایک مستطیلی ٹکڑے کے ابعاد ۱۷۲۰ میٹر ۷۵۰ میٹر اور ۵۰ میٹر ہیں، اگر سنگ مرمر کا وزن فی مکعب دسی میٹر ۲۱۶۴ کلوگرام ہو تو پورے ٹکڑے کا وزن دریافت کرو۔

[مکعب نامہ عجبات پر مزید مشقوں کے لئے ملاحظہ ہو صفحہ ۸۰]

۱۶۔ ایک قائم منشور کی طرفی سطح کا رقبہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ مفروضہ منشور کے قاعدہ کے اضلاع

ا ب، ب ج، ج د، میں بالترتیب طول کی

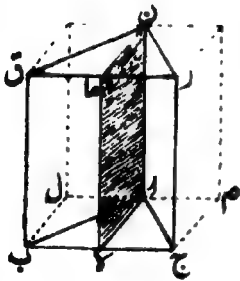


ا، ب، ج، اکائیاں
شامل ہیں اور منشور کا ارتفاع
ف ہے۔

چونکہ منشور قائم ہے اسلئے
اس کے ہر ایک رخ کا کناہ
ف ہے اور ہر طرفی رخ یا پہلو
ایک مستطیل ہے۔

تب مستطیل ا، ب، ق، و کا رقبہ = ا، ف اور اسی طرح سے
باقی پہلوؤں کے رقبے بالترتیب ب، ف، ج، ف، ہیں
منشور کی طرفی سطح کا رقبہ = ا، ف + ب، ف + ج، ف +
= (ا + ب + ج +) ف رقبہ کی اکائیاں

= قاعدہ کا محیط \times ارتفاع
۱۔ ایک قائم منشور کا
حجم دریافت کرو۔



۱۔ پہلے ایک مثلثی منشور
(ا، ب، ج، د، ق، ر) پر غور
کرو اور فرض کرو کہ اس کا
ارتفاع ف ہے۔

ان میں سے ایک سطح

مستوی ان مالا کھینچو جو رخ ب، ج، ر، ق پر عمود ہو،
یہ سطح منشور مذکور کو دو ایسے منشوروں میں تقسیم کرتی ہے

جن کے قاعدے قائم الزاویہ مثلث والا بل اور الاج ہیں۔

و میں سے ل م ب ج کے متوازی کھینچو اور مستطیل بل م ج کی تکمیل کرو پھر مستطیل بل م ج کو قاعدہ مان کر اس پر ایک مکعب بناؤ جس کا ارتفاع ف ہو۔

تب قاعدہ الابل پر کا منشور = $\frac{1}{3}$ (قاعدہ الابل پر کا مکعب نما)
اور قاعدہ الاج پر کا منشور = $\frac{1}{3}$ (قاعدہ الاج م پر کا مکعب نما)
قاعدہ اب ج پر کا منشور مفروضہ = $\frac{1}{3}$ (قاعدہ ل ب ج م پر کا مکعب نما)
= $\frac{1}{3}$ مستطیل ل ب ج م \times ارتفاع

= (قاعدہ اب ج کا قریبہ) \times ارتفاع

(۲) اسی طرح سے اگر منشور کا قاعدہ کوئی کثیر الاضلاع ہو تو اس کو ہمیشہ ایسے متعدد منشوروں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے جن میں سے ہر ایک کا قاعدہ ایک مثلث ہو اور ارتفاع وہی ہو جو اصلی منشور کا ہے۔



کسی قائم منشور کا حجم
= (مثلثی قاعدوں کا مجموعہ) \times ارتفاع
= (منشور مفروضہ کا قاعدہ) \times ارتفاع

مستطیلی مجسموں اور قائم منشوروں پر مشقیں

[ایک میٹر ایک مکعب دسی میٹر کے مساوی ہوتا ہے پانی کے ایک مکعب دسی میٹر کا وزن ایک کلو گرام ہوتا ہے کسی شے کی کثافت اضافی

سے مراد وہ نسبت ہوتی ہے جو اس شے کے وزن کو شے مذکور کے مساوی الجحم پانی کے وزن کے ساتھ ہو۔

مثلاً اگر فولاد کی کثافت اضافی ۸ و ۷ ہو تو اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ فولاد کے ایک مکعب دسی میٹر کا وزن ۷ و ۸ کلوگرام ہے [

۱۔ زمین کھودنے کی ایک مشین کے برے کی تراش کا رقبہ ۱۳۲۵ مربع فٹ ہے اور مشین ایک دن میں ۴ فٹ نیچے جاتی ہے، بتاؤ کہ ایک دن میں کتنے مکعب گز زمین کھودی جاتی ہے؟
۲۔ ایک خندق کی لمبائی ۲۵ و ۲۱ میٹر اور چوڑائی ۱۵ و ۱۰ میٹر ہے۔ خندق کے اندر پانی ہے جس کی گہرائی ۶۴ سنتی میٹر ہے، پانی کا وزن کلوگراموں میں معلوم کرو۔

۳۔ فولاد کی ایک سلاح ۱۶۲۸ میٹر لمبی ۱۵ سنتی میٹر چوڑی اور ۵ سنتی میٹر موٹی ہے، فولاد کی کثافت اضافی ۷ و ۸ ہے، سلاح کا وزن دریافت کرو۔

۴۔ پتھر کے کوئلہ کی ایک ہموار تہ کی اوسط موٹائی ۳ فٹ ہے، بتاؤ کہ اس میں سے فی ایکڑ کتنے ٹن کوئلہ دستیاب ہوتا ہے۔

[پانی کے ایک مکعب فٹ کا وزن = ۱۰۰۰ اونس

اور کوئلہ کی کثافت اضافی = ۱۶۲۸]

۵۔ ایک تالاب کی تہ اور اطراف کو پلستر کرنا منظور ہے، اگر

اخراجات فی مربع میٹر پنس ہوں اور تالاب ۲۵۵ میٹر لمبا،
۱۵۲۴ میٹر چوڑا اور ۱۵۵۰ میٹر گہرا ہو تو کل خرچ قریب ترین
پنس تک معلوم کرو۔

۶۔ جت کے ۳ ملی میٹر موٹے ایک ٹکڑے کا وزن فی مربع میٹر
معلوم کرو جبکہ جت کی کثافت اصنافی ۷۱۴ ہو۔

۷۔ ایک صندوق باہر کی طرف سے ۱۶۶۵ میٹر لمبا، ۱۵۲۵
میٹر چوڑا، ۵۵ میٹر اونچا ہے، اس کے تختوں کی موٹائی
۲۵ ملی میٹر ہے، صندوق کے اندر دینی ابعاد معلوم
کرو اور صندوق کے پینڈے اور اطراف پر دہات چڑھانے کا صرفہ
اشٹنگ ۳ پنس فی مربع میٹر کے حساب سے قریب ترین پنس تک
معلوم کرو۔

۸۔ ایک مکعب کے ایک کنارے کا طول معلوم کرو جبکہ

(۱) اس کی سطح ۲۵۵۳۵۰ مربع میٹر ہو

(۲) اس کا حجم ۲۷۶۶۲۵ مکعب سنتی میٹر ہو

۹۔ لکڑی کا ایک بند صندوق مساوی موٹائی کے تختہ کا بنا ہوا
ہے، باہر کی طرف سے یہ ۱۲ سنتی میٹر لمبا، ۱۰ سنتی میٹر چوڑا اور
۸ سنتی میٹر اونچا ہے اور اندر کی طرف سے صندوق کی سطح ۳۷۶
مربع سنتی میٹر ہے، تختہ کی موٹائی معلوم کرو۔

۱۰۔ ایک مستطیلی مجہم کی کل سطح ۱۳۳۲ مربع سنتی میٹر ہے،
اگر اس کے ابعاد ۱۴ : ۵ : ۶ کی نسبت میں ہوں تو اس کا طول
عرض اور بلندی معلوم کرو۔

۱۱۔ ایک مستطیلی مجسم کی کل سطح ۲۱۴ مربع سنتی میٹر ہے، اسکے قاعدہ میں ۴۲ مربع سنتی میٹر ہیں اور اس کے ایک انتصابی رخ میں ۳۵ مربع سنتی میٹر کناروں کے طول دریافت کرو۔

۱۲۔ ایک مکعب کا قطر ۱۰ سنتی میٹر ہے، اس کے کنارہ کا طول قریب ترین ملی میٹر تک معلوم کرو، نیز مکعب کی کل سطح اور حجم دریافت کرو۔

۱۳۔ ایک مستطیلی مجسم کی بلندی ۳ سنتی میٹر ہے اور اس کے قاعدہ کا رقبہ ۴۸ مربع سنتی میٹر ہے، اگر اس کا قطر ۱۲ سنتی میٹر ہو تو مجسم کا طول اور عرض معلوم کرو۔

۱۴۔ ایک مستطیلی مجسم کا قطر ۱۷ سنتی میٹر ہے اور اس کی کل سطح ۵۵۲ مربع سنتی میٹر ہے، اس کے تینوں ابعاد کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۱۵۔ ایک مستطیل شکل کا تالاب ہے، اس کے پیندے کے طول اور عرض بالترتیب ۲۰ فٹ اور ۱۶ فٹ ہیں، اگر تالاب میں ایک فٹ کے ذریعہ ۴۰ گیلن فی منٹ کے حساب سے پانی بھرا جائے تو بتاؤ کہ فی گھنٹہ کتنے انچ پانی اوپر چڑھے گا جبکہ ۱/۲ گیلن تقریباً ایک مکعب فٹ کے برابر محسوب کئے جائیں۔

قائم منشوروں پر

۱۶۔ ایک قائم منشور کا قاعدہ ایک مثلث ۱ ب ج ہے جس کا زاویہ ج قائم ہے، اگر ا ج = ۱۵ سنتی میٹر، ج ب = ۸ سنتی میٹر اور منشور کی بلندی = ۱۷ سنتی میٹر تو منشور کا حجم اور طرفی سطح معلوم کرو۔

- ۱۷۔ ایک قائم مشور کا قاعدہ ایک مثلث ہے جس کے اضلاع ۱۰ سنتی میٹر، ۱۰ سنتی میٹر اور ۹ سنتی میٹر ہیں، مشور کی بلندی ۱۰ سنتی میٹر ہے، اس کا حجم اور کل سطح معلوم کرو۔
- ۱۸۔ ایک قائم مشور کا قاعدہ ایک منحنی ہے جس کے متوازی اضلاع ۱۰ سنتی میٹر اور ۳ سنتی میٹر ہیں اور ان کا درمیانی فاصلہ ۸ سنتی میٹر ہے، اگر مشور کی بلندی ایک میٹر ہو تو اس کا حجم کسب سنتی میٹروں میں معلوم کرو۔
- ۱۹۔ ایک دیوار کے ساتھ سطح مائل کی شکل میں ریت کا ڈھیر پڑا ہے جس کی چوڑائی زمین پر ۴ فٹ ہے، سطح مائل افق کے ساتھ ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے، ایک کسب فٹ کے قریب ترین دسویں حصہ تک معلوم کرو کہ دیوار کی لمبائی کے ہر ایک فٹ کے مقابل کتنی ریت پڑی ہے۔
- ۲۰۔ ایک خندق کی عمودی تراش ایک منحنی ہے جس کا طول اوپر کے کنارہ پر ۱۵ فٹ اور پینڈے پر ۹ فٹ ہے، خندق کی گہرائی ہر جگہ ۸ فٹ ہے اور اس کا طول ۱۲ فٹ ہے، تقریباً کتنے گیلن اور کتنے ٹن پانی اس خندق میں آ سکتا ہے۔
- (پانی کا ایک کسب فٹ تقریباً ۶ گیلن کے مساوی ہوتا ہے اور اس کا وزن ۱۰۰۰ اونس سے متوازاں ہوتا ہے)
- ۲۱۔ کوئلہ کی ایک ۱۲ فٹ موٹی تہ سطح کے ساتھ ۲۳° درجہ کا زاویہ بناتی ہے، بتاؤ کہ ایک ایکڑ سطح کے نیچے کتنے ٹن کوئلہ ہوگا۔
- [کوئلہ کی موٹائی تہ پر عموداً ناپی گئی ہے، کوئلہ کا ایک ٹن ۲۸ کسب فٹ

جسکے گھیرنا ہے اور حجم $۷۳ = ۰.۶۹۲۰۵$ [

۲۲۔ لکڑی کے ایک نل کی عمودی تراش ایک مربع ہے جس کا ضلع ۸ سنتی میٹر ہے، نل میں سے ۴۰ میٹر فی سنٹ کی یکساں رفتار سے پانی بہہ رہا ہے، بتاؤ کہ دس لاکھ لیٹر پانی نکلنے کے لئے کتنا عرصہ درکار ہوگا۔

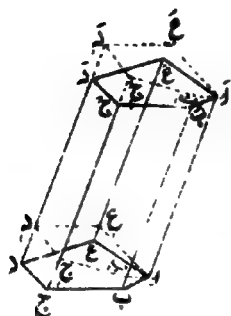
۲۳۔ ذیل کے قائم منشوروں کی طرزی سطحوں اور محبوس کا مقابلہ کرو۔
(۱) منشور کا قاعدہ ایک متکرم سدس ہے جس کا ضلع ۸ سنتی میٹر ہے، منشور کی بلندی ۶ سنتی میٹر ہے۔

(۲) قاعدہ ایک متکرم منمن ہے جس کا ضلع ۶ سنتی میٹر ہے، منشور کی بلندی ۸ سنتی میٹر ہے۔

۲۴۔ ریل کی سڑک کے لئے ۸۵۰ میٹر لمبی زمین کو ۵۰ میٹر کی یکساں گہرائی تک کھودنا منظور ہے، کٹائی کی چوڑائی اوپر سے ۲۱/۲۰ میٹر اور نیچے سے ۱۶/۸۰ میٹر ہونی چاہئے۔ اگر ہر روز بالادست ۴۵۰ ٹن مٹی کھودی جائے اور ایک کعب میٹر مٹی کا وزن ۲ ٹن ہو تو بتاؤ کہ کام کتنے عرصہ میں ختم ہوگا؟

۱۸۔ مائل منشور کا حجم دریافت کرو

ذیل کی شکل میں ایک مائل منشور (اب ج د ع، ا ب ج د ع) دکھایا گیا ہے جس کی قائم مستوی تراشیں یعنی ایسی تراش جو سب طرفی کناروں پر عمود ہو ا ب ج د ع ہے۔
اب فرض کرو کہ ا ب ج د ع اور ا ب ج د ع



کے درمیان کا مکڑا کاٹ کر
دوسرے سرے اب ج د ع
پر اس طرح لگایا گیا ہے کہ ا و
پر آتا ہے ، ب ، ب پر اور
علیٰ ہذا القیاس۔

اس طرح مفروضہ مثل
منشور ایک قائم منشور
(اب ج د ع ، ا ب ج د ع)

بن جاتا ہے جس کے کنارے دئے ہوئے منشور کے کناروں کے
برابر ہیں اور جس کا حجم = سرے اب ج د ع کا رقبہ \times ا و
اس لئے مثل منشور کا رقبہ

= اس کی عمودی تراش کا رقبہ \times کنارہ (۱)
اب فرض کرو کہ قاعدہ اب ج د ع اور عمودی تراش
اب ج د ع کے درمیان زاویہ طہ بنتا ہے ، تب عمودی
بلندی ف اور کنارہ ا و کا درمیانی زاویہ بھی طہ ہوگا۔ کیونکہ
یہ دونوں خطوط بالترتیب قاعدہ اور تراش کی سطوح مستوی
پر عماد ہیں۔

لہذا عمودی تراش ا ب ج د ع = قاعدہ اب ج د ع \times جھٹ
[صفحہ ۲]

نیز ف = ا و حجم طہ

(۱) میں یہ قیمتیں مندرج کرنے سے

مثل منشور کا حجم = قاعدہ اب ج د ع \times حجم طہ \times ا و

= قاعدہ (ب ج د ع x ف

پس مائل منشوروں کی صورت میں بھی قائم منشوروں کی مانند

حجم = (قاعدہ کا رقبہ) x (عمودی ارتفاع)

ثابت کرو کہ ایک مائل منشور کی طرفی سطح

= عمودی تراش کا محیط x کنارہ

اس کا ثبوت طالب علم کے لئے مشق کے طور پر چھوڑا جاتا ہے

۱۹۔ مائل منشور کا حجم (متبادل ثبوت)

قاعدہ کے متوازی سطوح مستوی کے ایک سلسلہ سے منشور

کو مسادی فاصلوں پر کاٹ کر

چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں

تقسیم کرو اور کسی دو متصل سطحوں

کے درمیان نیچے کی سطح پر ایک

قائم منشور بناؤ تب اس قسم

کی منشوری قاش کا حجم

= (اس کے قاعدہ کا رقبہ) موٹائی۔

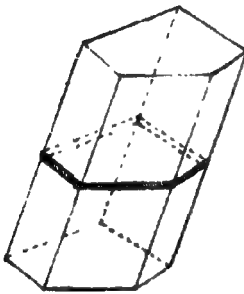
اب اگر ان قاشوں کی تعداد کو

لا انتہا بڑھا دیا جائے اور بنا برین ہر قاش کی موٹائی کو نہایت

چھوٹا کر دیا جائے تو انتہائی صورت میں کل منشور کا حجم ان

لا انتہا پتلی قاشوں کے مجموعی حجم کے مساوی ہوگا۔

لیکن چونکہ ہر قاش کا قاعدہ منشور کے قاعدہ کے مساوی



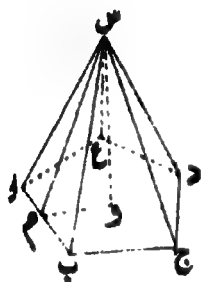
ہے اور ان سب کی موٹائی کا حاصل جمع عمودی بلندی کے برابر ہے۔ اس لئے منشور کا حجم قاعدہ کا رقبہ \times عمودی ارتفاع فرع۔ وہ منشور جن کے قاعدوں کے رقبے مساوی ہوں اور عمودی ارتفاع برابر ہوں ان کے حجم بھی برابر ہوتے ہیں نوٹ۔ اوپر کا ثبوت متوازی السطوح مجسموں کے لئے بھی درست ہو گا کیونکہ متوازی السطوح منشور کی ایک خاص صورت ہے، نفس ثبوت اس امر پر مبنی ہے کہ قاعدہ کے متوازی سب مستوی تراشیں ہر طرح سے ایک دوسرے کے مساوی ہوتی ہیں۔

محزوط مضلع

۲۰۔ ایک محزوط مضلع (س، اب ج د ع) کی مائل سطح سب مثلثی رخوں س اب، س ب ج، س ج د، کے حاصل جمع کے برابر ہوتی ہے اور عام صورت میں ہر مثلث کا رقبہ الگ الگ معلوم کرنا چاہیئے۔

لیکن اگر محزوط مضلع قائم ہو اور اس کا قاعدہ کوئی منتظم شکل ہو تو اس کی سطح مائل کے لئے ایک سادہ جملہ حاصل ہو سکتا ہے۔

۲۱۔ ایک قائم محزوط مضلع کا قاعدہ ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع ہے اس کی مائل سطح معلوم کرو۔ چونکہ محزوط مضلع قائم ہے اور اس کا قاعدہ منتظم ہے اس لئے اس کے مائل کنارے س ا، س ب، س ج



سب مساوی ہیں اور نیز رخ
س ا ب ، س ب ج ،
س ج د ... مساوی الساقین
مثلث ہیں جو ایک دوسرے
کے ہر طرح سے برابر ہیں -

اگر رأس س سے قاعدہ
کے ایک ضلع پر عمود س م
کھینچا جائے جو صرف یکا اس
ضلع کی تنصیف کرے گا تو اس عمود

کو مخروط مضلع کا مائل ارتفاع کہتے ہیں اور اس کی قیمت ہر مائل
پہلو کی صورت میں وہی ہوتی ہے -

اگر س سے قاعدہ پر عمود س و نکالا جائے تو فرع مسئلہ
۵ کے بموجب و م ، ا ب پر عمود ہوگا -

فرض کرو کہ قاعدہ کا ہر ضلع = ا ، عمودی ارتفاع س و عرف
اور مائل ارتفاع س م = ل ، تو مخروط مضلع کی سطح مائل

$$= \triangle س ا ب \times ن$$

$$= \frac{1}{4} ا ب \times س م \times ن$$

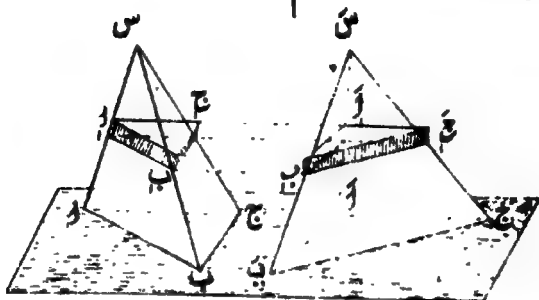
$$= \frac{1}{4} ن ا \times ل رقبہ کی اکائیاں$$

$$= \frac{1}{4} (قاعدہ کا محیط) \times (مائل ارتفاع)$$

کل سطح = سطح مائل + قاعدہ کا رقبہ

۲۲ - ثابت کرو کہ اگر دو مضلع مخروطوں (س ا ب ج)

اور (م، اَب ج) کے قاعدوں کے رقبے اور ارتفاع مساوی ہوں تو ان کے حجم بھی مساوی ہوتے ہیں۔



دونوں مجسموں کو اس طرح رکھو کہ ان کے قاعدے اَب ج اور اَب ج ایک ہی سطح مستوی میں ہوں اور ان کو قاعدوں کے متوازی مساوی فاصلوں پر مستوی سطحوں کے ایک سلسلہ سے قطع کو دو متصل مستوی سطحوں کے ہر زوج کے درمیان نیچے کی سطح کی تراش پر ایسے منشور بناؤ جن کے طرفی کنارے س اور م کے بالترتیب متوازی ہوں۔

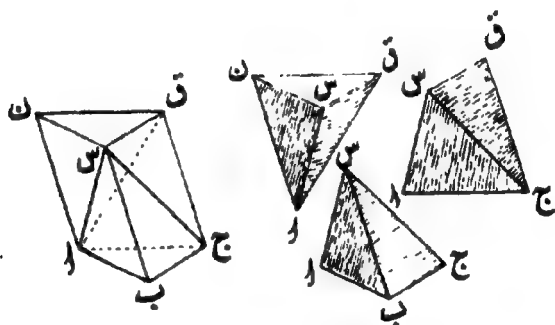
تب جو تراشیں دونوں مجسموں پر ایک ہی سطح مستوی کے تقاطع سے حاصل ہوں گی مثلاً اَب ج، اَب ج، ان کے رقبے بموجب فرع دفعہ ۳۱ باہم مساوی ہوں گے۔

لہذا ان تراشوں پر جو چھوٹے منشور بنائے گئے ہیں ان کے حجم بھی مساوی ہوں گے کیونکہ ان کی موٹائیاں برابر ہیں۔ اب اگر ان متوازی تراشوں کی تعداد کو لا انتہا بڑھا دیا

جائے اور بنا برین ان چھوٹے منشوروں یا قاشوں کی موٹائی کو
لا انتہا کم کر دیا جائے تو دونوں مجسم اپنی قاشوں کے مجموعی حجم
کے مساوی ہونگے اور چونکہ ایک مجسم کی کوئی قاش دوسرے
مجسم کی متناظر قاش کے مساوی ہے اس لئے کل مجسم بھی بجاواز
حجم کے ایک دوسرے کے مساوی ہونگے۔

نوٹ - اختصار کی غرض سے صرف مثلثی منشوروں پر بحث کی گئی
ہے لیکن سداک استدلال ہر حالت میں یہی ہوگی۔

۲۳- ایک مثلثی محزوط مضلع کا حجم معلوم کرو۔



فرض کرو کہ مثلثی محزوط مضلع (س، اب ج) ہے جس کا عودی
ارتفاع ف ہے۔

اور ج میں سے ب س کے متوازی خطوط کھینچو اور ان خطوط کو قاعدہ ا ب ج کے متوازی س میں سے گزرنے والی سطح مستوی سے قطع کرو، اس طرح ایک مثلثی منشور بنائیگا

جس کا حجم = Δ ا ب ج \times ف

متوازی الاضلاع ا ب ج ق ن کا قطراق کھینچو۔

اب یہ منشور ایک مخروط مضلع (س ا ب ج) میں جس کا قاعدہ مثلث ا ب ج ہے اور مخروط مضلع (س ا ج ق ن) میں جس کا قاعدہ متوازی الاضلاع ا ب ج ق ن ہے منقسم ہو سکتا ہے۔ نیز سو خرا ل ذکر مخروط مضلع پھر دو مضلع مخروطوں (س ا ن ق) اور (س ا ج ق) میں تقسیم ہو سکتا ہے جن کے حجم باہم مساوی ہیں کیونکہ ان دونوں کے قاعدے برابر ہیں اور ان کا راس س دونوں میں مشترک ہے۔

نیز مخروط مضلع (س ا ن ق) کو (ا ن س ق) سے بھی تبصیر کیا جاسکتا ہے۔

پس مخروط مضلع (ا ن س ق) = مخروط مضلع (س ا ب ج) کیونکہ ایک مجسم کا قاعدہ ن س ق دوسرے مجسم کے قاعدہ ا ب ج کے برابر ہے اور دونوں کے ارتفاع بھی مساوی ہیں۔ لہذا منشور مساوی حجموں والے تین مضلع مخروطوں میں تقسیم ہو جاتا ہے۔

$$\text{مخروط مضلع (س ا ب ج)} = \frac{1}{3} (\text{منشور کا حجم})$$

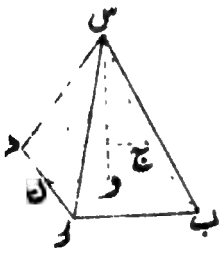
$$= \frac{1}{3} (\text{قاعدہ کا رقبہ}) \times (\text{عمودی ارتفاع})$$

فرع۔ اگر کسی مضلع مخروط کا قاعدہ ایک کثیر الاضلاع ہو تو اس کو مثلثی قاعدہ والے متعدد مضلع مخروطوں میں منقسم کر سکتے ہیں جن میں سے ہر مضلع مخروط کا ارتفاع اصلی مخروط مضلع کے ارتفاع کے برابر ہوتا ہے۔

$$\frac{1}{3} \times (\text{قاعدہ کا رقبہ}) \times (\text{عمودی ارتفاع}) =$$

مشقیں

۱۔ ایک قائم مخروط مضلع کی بلندی ۱۵ سنٹی میٹر ہے اور اس کا قاعدہ ایک مربع ہے جس کا ہر ضلع ۱۶ سنٹی میٹر ہے، مخروط مضلع کی (۱) سطح مائل اور (۲) حجم معلوم کرو۔



یہاں دس = ۱۵ سنٹی میٹر

$$ا ب = د ا = ۱۶ \text{ سنٹی میٹر}$$

$$و ن = \frac{1}{4} ا ب = ۸ \text{ سنٹی میٹر}$$

△ س و ن میں جس کا زاویہ

س و ن قائمہ ہے۔

$$س ن^2 = دس^2 + و ن^2 = ۱۵^2 + ۸^2 = ۲۸۹$$

$$\therefore س ن = \sqrt{۲۸۹} = ۱۷ \text{ سنٹی میٹر}$$

$$ر خ س د ا کا رقبہ = \frac{1}{4} د ا \times س ن$$

$$= \frac{1}{4} (۱۷ \times ۱۶) = ۱۳۶ \text{ مربع سنٹی میٹر}$$

$$پس سطح مائل = \triangle س د ا = ۴ \times ۱۷ = ۶۸ \text{ مربع سنٹی میٹر}$$

اور حجم = $\frac{1}{3}$ (قاعدہ کا رقبہ) \times ارتفاع
 $= \frac{1}{3} (14 \times 14 \times 15)$ مکعب سنتی میٹر
 $= 1280$ مکعب سنتی میٹر

۲۔ ایک قائم محزوط مضلع کا ارتفاع ۷ انچ ہے اور اس کا قاعدہ ۶ انچ کے ضلع پر ایک مربع ہے، محزوط مضلع کی سطح مائل اور حجم ایک مربع انچ کے قریب ترین سو دیں حصہ تک معلوم کرو۔

۳۔ ذیل کے مضلع محزوطوں کے حجم دریافت کرو
 (۱) محزوط مضلع کا قاعدہ ایک مستطیل ہے جس کے اضلاع

۱۱ سنتی میٹر اور ۷ سنتی میٹر ہیں اور محزوط کا ارتفاع ۱۲ سنتی میٹر ہے۔

(۲) محزوط مضلع کا قاعدہ ایک مثلث ہے جس کے اضلاع ۱۵

سنتی میٹر، ۱۴ سنتی میٹر اور ۱۳ سنتی میٹر ہیں اور بلندی ۱۰ سنتی میٹر ہے۔

۴۔ ایک قائم مضلع محزوط کا قاعدہ ۸ انچ کے ضلع پر ایک مربع ہے

اور اس کا ارتفاع ۹ انچ ہے، ایک انچ کے قریب ترین سو دیں حصہ

تک محزوط مضلع کا

(۱) مائل ارتفاع اور (۲) مائل کنارہ معلوم کرو۔

۵۔ ایک ایسے محزوط مضلع کی (۱) سطح مائل اور (۲) حجم دریافت

کرو جس کا قاعدہ اور ارتفاع اُس مکعب کے قاعدہ اور ارتفاع

کے برابر ہوں جو ۱۰ سنتی میٹر کے کنارہ پر بنایا جائے۔

۶۔ ایک قائم محزوط مضلع کا قاعدہ ایک مستطیل ہے جس کے

اضلاع ۲۴ سنتی میٹر اور ۱۸ سنتی میٹر ہیں اور ہر مائل کنارہ ۷ سنتی میٹر

ہے، محزوط مضلع کا حجم اور ارتفاع معلوم کرو۔

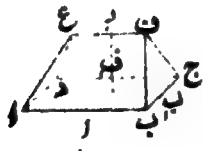
۷۔ ایک قائم محوطہ مضلع کا قاعدہ ایک مربع ہے جس کا ہر مضلع ۱۴ لچ ہے اور ارتفاع ۲۰ لچ۔

(۱) اس دو سطحی زاویہ کی جیب التمام دریافت کرو جو ہر پہلو اور قاعدہ کے درمیان بنتا ہے نیز (۲) قاعدہ پر ہر پہلو کا جو ظل ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔

۸۔ ایک قائم محوطہ مضلع کا قاعدہ ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے جس کا ہر مضلع ۱۰ سنتی میٹر ہے، محوطہ کا ارتفاع ۵ سنتی میٹر ہے اس کے (۱) مائل ارتفاع (۲) ایک پہلو کا رقبہ (۳) اور پہلو اور قاعدہ کے دو سطحی زاویہ کی جیب التمام کو دریافت کرو ایک مستوی زاویہ بناؤ جس کی جیب التمام یہی ہو اور اس کی پیمائش زاویہ کش سے کرو۔

۹۔ ایک محوطہ مضلع کا حجم ۲۵۰ مکعب سنتی میٹر ہے اور اس کا قاعدہ ایک منظم سدس ہے جس کا ہر مضلع ۶ سنتی میٹر ہے، محوطہ مضلع کا ارتفاع قریب ترین ملی میٹر تک معلوم کرو۔

۱۰۔ جس مجسم کی تصویر ساتھ میں دی گئی ہے اس کو فائدہ کہتے ہیں اس کا قاعدہ ایک مستطیل ہے جس کا



طول ۱۰ اور عرض ۵ ہے اور اس کے سرے دو مثلث \triangle اور \triangle ہیں۔

باقی کے رخ \triangle \triangle \triangle اور \triangle \triangle \triangle دو منحرف ہیں جن میں مضلع \triangle \triangle مشترک ہے اور اسے یہ قاعدہ کے دو ضلعوں کے متوازن

اگر طرئی کناروں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ کے طول ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲

ہوں تو ثابت کرو کہ منشور ناقص کا حجم

$$= \text{قاعدہ کا رقبہ} \times \frac{1}{3} (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

[منشور ناقص کو ایک ایسی سطح مستوی سے قطع کرو جو قاعدہ کے متوازی ہو اور طرئی کناروں میں سے سب سے چھوٹے کے ایک سرے کو میں سے گزرے اور اس طرح مفروضہ منشور کو ایک قائم منشور اور ایک مخروط مطلع میں تقسیم کرو]

۱۳۔ (یوکر کا مسئلہ) اگر کسی کثیرالسطوح میں رخوں، کناروں اور رأسوں کی تعداد کو بالترتیب x ، y ، z سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$x - y + z = 2$$

فرض کرو کہ کثیرالسطوح n رخوں کو یکے بعد دیگرے جوڑنے سے بنایا گیا ہے۔

اگر x صرف ایک ہو تو رأسوں اور کناروں کی تعداد مساوی ہوگی

اس صورت میں $z = x$

دوسرا رخ شامل کرنے سے پہلے x کے ساتھ ایک کنارہ اور دو رأس مشترک ہو جاتے ہیں، یعنی نئے کناروں کی تعداد نئے رأسوں کی تعداد سے بقدر ایک کے زیادہ ہوتی ہے۔

$$z = x + 1$$

تیسرا رخ پہلے رخوں کے ساتھ تین رأس اور دو کنارے مشترک رکھتا ہے اور حسب سابق نئے کناروں کی تعداد نئے رأسوں کی

تعداد سے بقدر ایک کے زیادہ ہوتی ہے۔

$$۲ + ر = ک$$

اسی طرح بتدریج ایک ایک رخ بڑھاتے جانے سے جب ن - ۱

$$رخ لگائے جائینگے تو ک = ر + ن - ۲$$

آخری رخ کا اضافہ کرنے سے کسی نئے کنارے یا راس کا اضافہ

نہیں ہوتا اور ن اور خ برابر ہو جاتے ہیں۔

$$۲ - ک = ر + خ$$

$$۲ + ک = ر + خ$$

۲۴۔ منظم کثیر السطوح زیادہ سے زیادہ پانچ ہو سکتے ہیں۔

ایک مجسم زاویہ بنانے کے لئے کم از کم تین مستوی زاویوں کی

ضرورت ہوتی ہے اور مسئلہ ۲۰ کی رو سے ان مستوی زاویوں

کا مجموعہ ۳۶۰ سے کم ہوتا ہے، اگر کثیر السطوح منتظم ہو

اور بنا برین ہر مجسم زاویہ کے احاطہ کرنے والے مستوی زاویے

سب باہم مساوی ہوں تو اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ہر زاویہ

۱۲۰ سے لازماً کم ہوگا یعنی رخ یا تو متساوی الاضلاع مثلث

ہونگے، یا مربیے یا منتظم منہس، کیونکہ منتظم سدس کا زاویہ

۱۲۰ ہوتا ہے اور چھ سے زیادہ اضلاع کے کثیر الاضلاع کا زاویہ

۱۲۰ سے بڑا ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ کسی رخ کے زاویہ میں درجوں کی تعداد کو د سے تعبیر

کیا جاتا ہے، اگر رخ متساوی الاضلاع مثلث ہوں تو د = ۶۰

تب (۱) ۵۳ = ۱۸۰ ، (۲) ۵۴ = ۶۴۰ ، (۳) ۵۵ = ۳۰۰

[۵۶ = ۳۶۰]

پس تین، چار یا پانچ متساوی الاضلاع مثلثوں کو جوڑنے سے ایک منتظم کثیر السطوح کا ایک مجسم زاویہ بن سکتا ہے، پانچ سے زیادہ مثلثوں سے مجسم زاویہ نہیں بنے گا۔
اگر رخ مربع ہوں تو $۹۰ = ۹۰$

تب (۴) $۲۴۰ = ۵۳$ [۳۶۰ = ۵۴]
اس صورت میں تین اور صرف تین مربع استعمال کئے جاسکتے ہیں۔

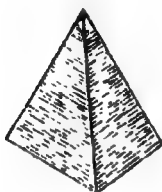
اگر رخ منتظم مخمس ہوں تو $۱۰۸ = ۵$
تب (۵) $۳۲۴ = ۵۴$ [۴۳۲ = ۵۴]
اس صورت میں تین اور صرف تین منتظم مخمس استعمال کئے جاسکتے ہیں۔

پس پانچ اور صرف پانچ منتظم کثیر السطوح بن سکتے ہیں۔
۲۵۔ اگر ان منتظم کثیر السطوح مجسموں میں سے کسی ایک کے سب رنوں کو جو اس کی سطح پر مشتمل ہوں کھول کر ایک سطح مستوی پر بچھائیں تو ہمیں ایک مستوی شکل حاصل ہوگی جو مختلف صورتوں میں متساوی الاضلاع مثلثوں، مربعوں اور منتظم مخمسوں سے بنی ہوئی ہوگی، ایسی مستوی شکل کو اسکے کثیر السطوح کا ڈھانچہ کہتے ہیں۔

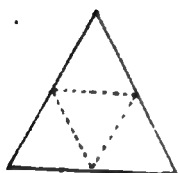
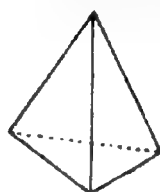
منتظم کثیر السطوح اور ان کے ڈھانچوں کی تصویریں چھوٹے پیمانہ پر صفحات ۱۰۲ تا ۱۰۰ میں دکھائی گئی ہیں۔

منتظم کثیر السطوح

(۱) وہ کثیر السطوح جس کا ہر ایک مجسم زاویہ تین متساوی الاضلاع مثلثوں کے متساوی زاویوں سے بنا ہوا ہو اس کو منتظم ذواربعتہ السطوح (یا چار سطھی) کہتے ہیں۔

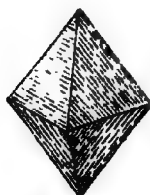


۴ بیخ
۴ راس
۶ کنارے

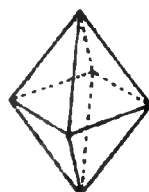


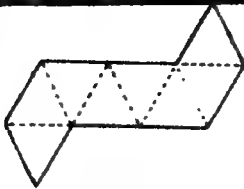
منتظم ذواربعتہ السطوح کا ڈھانچہ چار متساوی الاضلاع مثلثوں پر مشتمل ہوتا ہے جیسا کہ ساتھ کی شکل میں دکھایا گیا ہے۔

(۲) وہ کثیر السطوح جس کا ہر مجسم زاویہ چار متساوی الاضلاع مثلثوں کے زاویوں سے بنا ہو اس کو ہشت سطھی کہتے ہیں



۸ بیخ
۶ راس
۱۲ کنارے



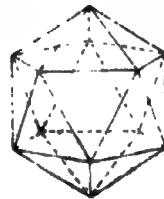


ایک منظم ہشت سطحی کا ڈھانچہ
۸ متساوی الاضلاع مثلثوں
پر مشتمل ہوتا ہے۔

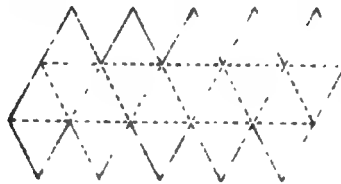
(۳) وہ کثیر السطوح جس کا ہر مجسم زاویہ پانچ متساوی الاضلاع
مثلثوں کے زاویوں سے بنا ہو بست سطحی کہلاتا ہے



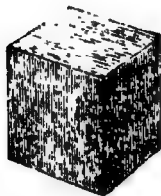
۶ رخ
۱۲ راس
۳۰ کنارے



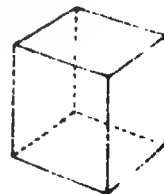
منظم بست سطحی کا خاکہ ۲۰ متساوی الاضلاع مثلثوں پر مشتمل ہوتا ہے



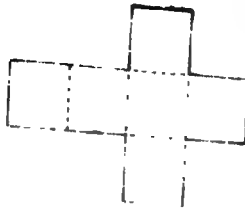
(۴) وہ منظم کثیر السطوح جس کا ہر مجسم زاویہ تین مربعوں کے زاویوں سے
بنا ہو کعب کہلاتا ہے۔



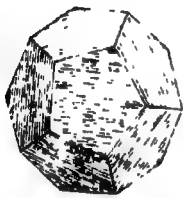
۶ رخ
۸ راس
۱۲ کنارے



ایک کمپ کا ڈھانچہ ۶ مساوی مربعوں پر مشتمل ہوتا ہے۔



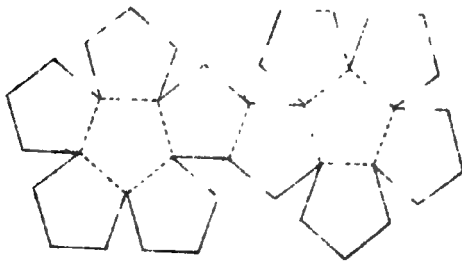
(۵) وہ کثیر السطوح جس کا ہر مجسم زاویہ تین منظم محسوس کے زاویوں سے بنا ہوا ہو دوازوہ (بارہ) سطوحی کہلاتا ہے۔



۱۲ رخ
۲۰ رأس
۳۰ کنارے



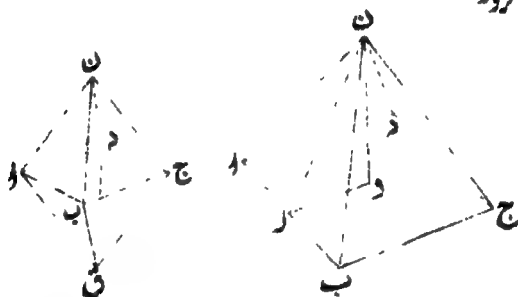
ایک منظم دوازوہ سطوحی کا ڈھانچہ ۱۲ مساوی منظم محسوس پر مشتمل ہوتا ہے



منظم کثیر السطوح مجسموں کے بنانے میں ذیل طریقہ سے تیار کئے جاسکتے ہیں

سب سے پہلے مجسم کا ڈھانچہ کاغذ کے ایک موٹے تختہ پر کھینچو پھر اس ڈھانچہ کو باہر کے خطوں پر پورے طور سے کاٹو اور اندرونی خطوں پر بھی اطراف سے غور ڈالسا کاٹ لو پھر رخوں کو اس طرح شکن دینے سے کہ کنارے ایک دوسرے کے ساتھ مل جائیں مجسم مطلوب تیار ہو جاتا ہے اور کناروں کو اس مقام پر رکھنے کے لئے گوند سے چکا دیا جاتا ہے۔

مشق - ایک نظم ہشت سطحی کا ہر کنارہ ۴ م ہے (۱) اس کے قطر کا طول (۲) اس کی سطح (۳) اس کا دوسطی زاویہ (۴) اور مجسم دریافت کرو۔



شکل سے ظاہر ہے کہ ایک نظم ہشت سطحی دو مضلع مخروطوں پر مشتمل ہوتا ہے جو مربع قاعدہ 'ا ب ج د' کی دونوں جانب واقع ہوتے ہیں، ان مضلع مخروطوں میں سے ایک بڑے پیمانے پر دائیں جانب دکھایا گیا ہے۔ 'ن' نقطہ 'ن' سے قاعدہ پر عمود ہے اور 'ر' مربع 'ا ب ج د' کا وسطی نقطہ ہے 'ن ر' 'ا ب' کا عمودی منصف ہے۔

$$اب \text{ } ا ب = ۴ \text{ م} \therefore ر ب = ۴ \text{ م} \text{ } ر و = ۴ \text{ م}$$

$$ن ر = ر ب = ۴ \text{ م} \text{ } ن د = ۴ \text{ م}$$

قائم الزاویہ مثلث 'ن و ر' سے

$$\text{ون} = \text{ن ر} - \text{ور} = ۲۳ - ۲ = ۲۱$$

$$\text{ن} = \text{ون} = ۲۱$$

$$\text{پس (۱) ہفت سطحی کا قطر} = ۲ \text{ون} = ۲۱ \times ۲ = ۴۲$$

$$\text{(۲) سطح} = ۸ \times \Delta \text{ن اب} = ۸ \times ۸ \times \text{رن} \times \text{رب}$$

$$= ۸ \times ۸ \times ۲۱ \times ۲۱ = ۲۸۲۴$$

$$\text{(۳) حجم} = ۲ \times (\text{اس مخروطی سطح کا حجم جس کا رأس ن ہے})$$

$$= ۲ \times \frac{1}{3} \times \text{ون} \times \text{قاعدہ کا رقبہ}$$

$$= ۲ \times \frac{1}{3} \times ۲۱ \times ۲۱ = \frac{۲۸۲۴}{۳}$$

$$\text{اور (۴) وسطی زاویہ} = ۲ \times \text{زاویہ ن رو}$$

$$\text{اب مس ن رو} = \frac{\text{ن و}}{\text{ور}} = \frac{۲۱}{۲۱} = ۱ \quad \text{۱۵۱۴۲.....} = ۲۱$$

اس سے بذریعہ جداول اس معلوم ہو سکتا ہے کہ

$$\text{ن رو} = ۵۴ \quad \text{تقریباً}$$

$$\text{پس وسطی زاویہ} = ۱۰۹ \quad \text{تقریباً}$$

کثیر السطوح مجسموں پر متفرق مثالیں

۱۔ پیمائش سے معلوم ہوا کہ ایک مستطیلی مجسم کے ابعاد ۸۵

سنٹی میٹر ۴۱ سنٹی میٹر اور ۶ سنٹی میٹر ہیں۔ اس کا حجم

محاسبہ کرو۔

اگر مندرجہ بالا ابعاد میں سے ہر ایک کی قیمتیں از روئے

پیمائش اصلی ابعاد سے بقدر ایک ملی میٹر کے زیادہ یا کم ہوں تو کسی

یا بیشی کے لحاظ سے زیادہ سے زیادہ غلطی جو جواب میں ہو سکتی ہے
اسے معلوم کرو۔ نیز دریافت کرو کہ یہ غلطیاں دونوں صورتوں میں
مفروضہ حجموں کا کتنے فیصدی ہونگی۔

۲۔ لکڑی کے ۱۵ انچ چوڑے تختے کا ایک سرا ۸ فٹ اوچی
دیوار کے اوپر کے کنارے کے ساتھ لگا یا گیا ہے اور تختہ کا
دوسرا سرا زمین پر دیوار سے ۶ فٹ کے فاصلہ پر ہے، اگر تختہ
کی موٹائی $\frac{1}{4}$ انچ ہو اور ایک کعب فٹ لکڑی کا وزن ۵۶ پونڈ
ہو تو تختہ کا وزن دریافت کرو۔

۳۔ ایک مثلث متساوی الاضلاع ΔABC کا ہر ضلع ۱۰ سنی میٹر
ہے، مثلث کا غل ایک ایسی سطح مستوی پر بنایا گیا ہے جو ΔB
میں سے گزرتی ہے، اگر سطح مستوی پر کے غل کا رقبہ ۳۴ و ۶۴
مرج سنی میٹر ہو تو دونوں مستوی سطحوں کا درمیانی زاویہ معلوم کرو
[دو سطحی زاویہ کی جیب اتمام محسوب کرو اور اس کے بعد جدو لیں
استعمال کرو یا اس کے قناطر مستوی زاویہ کی پیمائش کرو۔] $104.32 \dots 33$

۴۔ ایک قائم محزوطہ مضلع کا ارتفاع ۸ سنی میٹر ہے اور اس کا
قاعدہ ۴ سنی میٹر کے ضلع پر ایک منتظم سدس ہے (۱)، ایک مرج
سنی میٹر کے قریب ترین دسویں حصہ تک اس کی ماقبل سطح معلوم
کر دو اور (۲) ایک کعب سنی میٹر کے قریب ترین دسویں حصہ
تک اس کا حجم دریافت کرو۔

۵۔ ایک قائم محزوطہ مضلع کا قاعدہ ایک مرج ہے جس کا ہر
ضلع ۶ سنی میٹر ہے اور اس کے ماقبل رخ متساوی الاضلاع مختلف

ہیں۔ مخروطی مضلع کا ڈھانچہ کھینچو اور اس کے حجم اور ارتفاع کی تقریبی قیمتیں معلوم کرو۔

۶۔ ایک قائم مخروطی مضلع کے قاعدہ کے کونے لفظاً (۹۰، ۹۰)، (۹۰، ۹۰)، (۹۰، ۹۰)، (۹۰، ۹۰)، (۹۰، ۹۰) ہیں اور اس کا راس نقطہ (۱۲، ۰، ۰) پر ہے اس کی سطح مائل محسوب کرو۔
دیکھو صفحہ (۶۰-۶۲)

۷۔ ایک قائم مخروطی مضلع کا قاعدہ ایک منتظم سدس ہے جس کا ہر مضلع ۵ سنتی میٹر ہے اور اس کے مائل پہلو قاعدہ کے ساتھ ۹۰ کا زاویہ بناتے ہیں، اس کا حجم دریافت کرو۔

۸۔ اگر ایک منتظم ذواربعتہ السطوح کے راس سے اس کے قاعدہ پر عمود نکالا جائے تو ثابت کرو کہ عمود کا پایہ قاعدہ کے ہر ایک وسطیٰ کھنست ۱:۲ میں تقسیم کرتا ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ اگر ایک منتظم ذواربعتہ السطوح کے ایک کونہ سے مقابل کے رخ پر عمود نکالا جائے اور پھر اس عمود کے پائیں سے ایک اور عمود کسی دوسرے رخ پر نکالا جائے تو پہلا عمود دوسرے عمود کا تین گنا ہوگا۔

۱۰۔ ایک منتظم ذواربعتہ السطوح کے ایک کونے سے مقابل کے رخ پر عمود نکالا گیا ہے، اگر اس عمود کو C سے تعبیر کیا جائے اور مجسم مذکور کا ہر ایک کنارہ ۲ م ہو تو ثابت کرو کہ

$$C^2 = 8M^2$$

۱۱۔ ایک منتظم ذواربعتہ السطوح کا ہر کنارہ ۲ م ہے، ثابت کرو کہ

کل سطح = ۳۲۴ اور حجم = $\frac{۲}{۳} \times ۲۷۲$

۱۲۔ ایک متظم ذواربعتہ السطوح کی کسی دو متصل رخوں کے درمیان جو دو سطحی زاویہ بنتا ہے اس کی تقریبی قیمت معلوم کرو۔
۱۳۔ ثابت کرو کہ ایک متوازی السطوح کے چار قطروں پر جو مربع بننے میں اُن کا مجموعہ اُن مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہے جو اس کے بارہ کناروں پر بنائے جائیں۔

(۲) ایک ذواربعتہ السطوح کے سب کناروں کے مربعوں کا مجموعہ اُن مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہے جو مقابل کے کناروں کے وسطی نقاط کو ملانے والے پر بنائے جائیں۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ اگر ایک ذواربعتہ السطوح کے دو رخوں کے خط تقاطع میں سے ایک ایسی سطح مستوی کھینچی جائے جو ان رخوں کے دو سطحی زاویہ کی تنصیف کرے تو یہ سطح مستوی مقابل کے کنارہ کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرے گی جن کی نسبت مذکورہ رخوں کے رقبوں کی نسبت کے برابر ہوگی۔

۱۵۔ اگر ایک مکعب کے ایک نقطہ میں سے گزرنے والے کنارے $وا$ ، $وب$ ، $وج$ ہوں اور ہر ایک کا طول ۱ ہو تو ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ محزوطہ منقطعہ } (وا، اب، ج) \text{ کا حجم} = \frac{۱}{۶}$$

$$(۲) \text{ مثلث } اب ج \text{ کا رقبہ} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$(۳) \text{ نقطہ } و \text{ سے سطح } اب ج \text{ پر کا عمود} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۶۔ فضائیں تین مستقیم خطوں 'و'، 'ب'، 'ج' ہیں، ان میں سے ہر ایک باقی دو پر عمود ہے، اگر ان خطوں کے طول بالترتیب 'و'، 'ب'، 'ج' ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ مخروط مضلع (و، ا ب ج) کا حجم} = \frac{۱}{۳} \text{ و ا ب ج}$$

$$(۲) \text{ مثلث ا ب ج کا رقبہ} = \frac{۱}{۲} \text{ و ا ب ج} + \frac{۱}{۲} \text{ ب ج ا} + \frac{۱}{۲} \text{ ج ا ب}$$

(۳) نقطہ سے سطح مستوی ا ب ج پر کا عمود

$$= \frac{\text{و ا ب ج} + \text{ب ج ا} + \text{ج ا ب}}{\text{و ا ب ج}}$$

۱۷۔ بتاؤ کہ ایک مکعب کو ایک مستوی سے کس طرح کاٹا جائے کہ خطوط تقاطع سے ایک منتظم سدس بنے۔

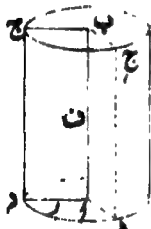
۱۸۔ ایک قائم مخروط مضلع کا قاعدہ ایک مربع ہے جس کا ہر ضلع 'ا' ایچ ہے اور ارتفاع 'ف' ایچ ہے، مضلع کے اذن ایسا بڑے سے بڑا مکعب بنایا گیا ہے جس کا ایک رخ مخروط مضلع کے قاعدہ کی سطح مستوی میں واقع ہے، ثابت کرو کہ مکعب کا ہر کنارہ

$$= \frac{\text{ا ب ف}}{\text{ا ب} + \text{ف}}$$

گردشی مجسمات

اسطوانہ

۲۶۔ تعریف۔ قائم مستدیر اسطوانہ ایک ایسا مجسمہ ہے جو ایک مستطیل کو اس کے ایک ضلع کے گرد پھرانے سے حاصل ہوتا ہے جبکہ اس ضلع کو بطور محور کے ثابت رکھا جائے۔



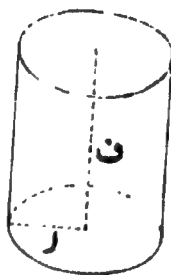
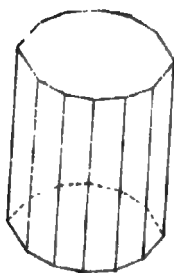
پس اگر مستطیل ا ب ج د محور ا ب کے گرد گھومے تو مقابل کے ضلع ج د کے گھومنے سے اسطوانہ کی منحنی سطح پیدا ہوگی (ملاحظہ ہو ساہلی شکل) ضلع ج د کو جو ہمیشہ اثناء گردش میں

محور کے متوازی رہتا ہے سطح کا تکوینی خط کہتے ہیں چونکہ اضلاع ا د، ب ج محور پر عمود ہیں وہ دو متوازی سطحوں میں حرکت کرتے ہیں اور اسطوانہ کے مستدیر سروں یا قاعدوں کو مرتسم کرتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ قائم اسطوانہ کا عمودی ارتفاع اس کے محور ا ب کا طول ہے۔

اگر ایک قائم مستدیر اسطوانہ کی مستوی تراش قاعدہ کے متوازی لی جائے تو ظاہر ہے کہ یہ تراش ایک دائرہ ہوگی۔ نیز اگر اسطوانہ کو محور کے متوازی کاٹا جائے تو تراش ایک مستطیل ہوگی۔

۲۷۔ بالعموم اگر ایک مکوینی خط ایک ثابت منحنی پر (جو اس سطح میں واقع نہ ہو جس پر خط مذکور واقع ہے) علی التسلل بھلے اور اثنائے حرکت میں ہمیشہ اپنے متوازی رہے تو یہ ایک سطح مرتسم کرے گا جس کو اسطوانی سطح کہتے ہیں۔ ثابت منحنی قائم کہلاتا ہے۔ قائم مستدیر اسطوانہ کی خاص صورت میں قائم ایک دائرہ ہے جس کی سطح مکوینی خط پر عمود ہے۔ اگر اس کے غلاف ذکر نہ ہو تو کتاب کے اس حصہ میں من قائم مستدیر اسطوانوں پر بحث ہوگی۔

۲۸۔ اسطوانہ کی سطح اور حجم دریافت کرو



ایک قائم منشور پر غور کرو جس کا قاعدہ ایک منتظم کثیر الاضلاع ہے۔ اگر قاعدہ کی تعداد اضلاع کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تو کثیر الاضلاع بالآخر ایک دائرہ بن جائے گا اور اس صورت میں منشور کی شکل قریب قریب ایک قائم اسطوانہ ہوگی، پس اسطوانہ کو ہم ایک منشور کی انتہائی صورت

خیال کر سکتے ہیں اور اس وجہ سے اسطوانہ کی سطح اور حجم کے متعلقہ جملات منشور کے متناظر جملوں سے حاصل ہو سکتے ہیں دیکھو صفحات ۸۰، ۸۱۔

پس

(۱) اسطوانہ کی منحنی سطح = (قاعدہ کا محیط) \times ارتفاع

$$= 2\pi r \times f$$

$$= 2\pi r f \text{ رقبہ کی اکائیاں}$$

(۲) اسطوانہ کا حجم = (قاعدہ کا رقبہ) \times ارتفاع

$$= \pi r^2 \times f$$

$$= \pi r^2 f \text{ حجم کی اکائیاں}$$

نوٹ ۱۔ کل سطح = منحنی سطح + سروں کا رقبہ

$$= 2\pi r f + 2\pi r^2$$

$$= 2\pi r (f + r)$$

نوٹ ۲۔ ایک ایسے ماٹل اسطوانہ کا حجم جو کسی قاعدہ پر کھڑا ہو ضابطہ ذیل سے حاصل ہوگا

حجم = (قاعدہ کا رقبہ) \times (عمودی ارتفاع)

ماٹل منشور کی صورت میں بھی یہی ضابطہ تھا۔

نوٹ ۳۔ اسطوانہ کی منحنی سطح کیلئے جو ضابطہ ابھریا گیا ہے اس کی توجیج اس طرح ہو سکتی ہے۔



فرض کریں کہ اسطوانہ کی سطح ایک سکونی خط $ن ق$ پر کاٹ دی گئی ہے اور پھر اس کو کھول کر ایک مستوی سطح پر بچھا دیا گیا ہے، ظاہر ہے کہ سطح ایک مستطیل $ن ق ر س$ کی شکل اختیار کرے گی اور اس مستطیل کا طول $ن س$ اور عرض $ن ق$ بالترتیب اسطوانہ کا محیط اور ارتفاع ہوگا۔

$$\text{پس منحنی سطح} = ن س \times ن ق$$

$$= \text{محیط} \times \text{ارتفاع}$$

نوٹ ۴۔ جو منحنی سطحیں بغیر کھینچنے یا پھٹنے کے اس طرح کھل سکیں کہ مستوی شکلوں سے تعبیر ہو سکیں ان کو قابل استواء سطحیں کہتے ہیں۔

مشقیں

[جن مثالوں میں π واقع ہوتا ہے ان سے حل کرنے میں مناسب ہوگا کہ π کی جگہ اس کی عددی قیمت میں آخر تک مندرجہ ذیل کی جائے اور ہر صورت میں π کی وہ عددی قیمت منتخب کی جائے جس سے جواب مطلوبہ درجہ صحت تک حاصل ہو]

۱۔ جن اسطوانوں کے ابعاد ذیل میں دیے ہیں ان کی منحنی سطحیں (قریب ترین مربع سنتی میٹر تک) اور حجم (قریب ترین کعب سنتی میٹر تک) دریافت کرو

$$(۱) \text{ } r = ۲۵.۰ \text{ سنتی میٹر، } h = ۸۶.۰ \text{ سنتی میٹر}$$

$$(۲) \text{ } r = ۴۵.۰ \text{ ، } h = ۷۶.۰$$

۲۔ ایک ایسے اسطوانہ کی کل سطح قریب ترین مربع سنتی میٹر تک

دریافت کرو جس کا ارتفاع ۱۵۶۸ سنتی میٹر ہو اور جس کے قاعدہ کا قطر ۸۶۴ سنتی میٹر ہو۔

۳۔ ایک قائم منشور کا قاعدہ شکل میں مربع ہے جس کا ضلع ۳۶۶ سنتی میٹر ہے، ایک اسطوانہ جس کا ارتفاع ۱۲ سنتی میٹر ہے اس منشور کے اندر عین آسکتا ہے، اسطوانہ کا حجم قریب ترین مکعب سنتی میٹر تک دریافت کرو۔

۴۔ اس نقطہ کا طریق دریافت کرو جس کا عمودی فاصلہ ایک مفروضہ محدود مستقیم خط سے مستقل ہو۔

اگر عمودی فاصلہ = ۳۵۵ سنتی میٹر، اور مفروضہ خط کا طول = ۵۶۶ سنتی میٹر، تو قریب ترین مربع سنتی میٹر تک اس سطح کا رقبہ دریافت کرو جس پر یہ نقطہ واقع ہو سکتا ہے۔

[نوٹ سنتی میٹر = سمر]

۵۔ ایک مجوف اسطوانہ کے دونوں سرے کھلے ہیں، اس کا طول ۱۲ سمر ہے بیرونی قطر ۸ سمر اور سونائی ۲ سمر ہے، قریب ترین مربع سنتی میٹر تک اس کی کل سطح دریافت کرو۔

۶۔ اسطوانہ کی شکل کا ایک ستون ہے، اس کا حجم ۱۲۸۶۲ مکعب میٹر ہے اور اس کے قاعدہ کا قطر ۴ میٹر ہے، قریب ترین سنتی میٹر تک اس کا ارتفاع معلوم کرو۔

۷۔ ایک مکعب انچ سونے سے ۱۰۰۰ گز لمبا بنا دیا گیا ہے، تار کا قطر انچ کے قریب ترین ہزارویں حصہ تک دریافت کرو۔

۸۔ ایک اسطوانہ کی منحنی سطح ۱۰۰۰ مربع سنتی میٹر ہے اور اس کے

قاعدہ کا قطر ۲۰ سنتی میٹر ہے، اسطوانہ کا حجم دریافت کرو، نیز

قریب ترین ملی میٹر تک اس کا ارتفاع معلوم کرو۔

۹۔ ایک گڈی کا قالب قائم منشور کی شکل کا ہے، اس کا ارتفاع

۱۰ فٹ ہے اور اس کے مستطیل قاعدہ کے اضلاع ۱ فٹ

۴ انچ اور ۱ فٹ ہیں، یہ قالب اسطوانہ کی شکل کے ایک

خول میں پھنس کر آتا ہے، اگر قالب اور خول کے درمیان کی

جگہ میں کنکر چوتھونے سے ایک ستون بنایا جائے تو قریب ترین

کمب فٹ تک کنکر چوتھونے کا حجم دریافت کرو۔

۱۰۔ ایک لوہے کا نل اسطوانہ کی شکل کا ہے، اس کا طول ۱۸ میٹر ہے،

بیرونی قطر ۵۴ سنتی میٹر اور موٹائی ۴ ملی میٹر۔ اگر لوہے کی

کثافت اضافی ۷۹۷۰ ہو تو نل کا وزن کلو گراموں میں پہلے درجہ

کے قریب ترین اعشاریہ تک دریافت کرو۔

۱۱۔ ایک تانبے کا تار کو جس کا قطر ۲ ملی میٹر ہے ایک اسطوانہ

کے گرد اس کی تمام سطح پر یکساں طور پر پھیلا گیا ہے، اسطوانہ

کا طول ۱۲ سنتی میٹر ہے اور قطر ۱۰ سنتی میٹر، اگر تانبے کی

کثافت اضافی ۸۸۰۰ ہو تو تار کا طول اور وزن دریافت کرو۔

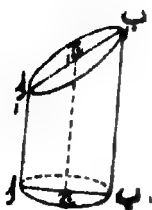
۱۲۔ ساتھ کی شکل میں ایک ناقص

اسطوانہ ہے جو اٹل تراش سے

پیدا ہوا ہے۔ ایسا خیال کرو کہ

اس جسم کو ایک ایسی مستوی سطح

کاٹتی ہے جو ج میں سے گزرتی ہے



اور قاعدہ Δ ب کے متوازی ہے۔ اس طرح سے ثابت کرو کہ

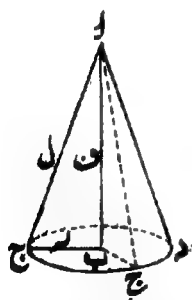
$$(۱) \text{ منحنی سطح } = ۲\pi \times \text{ج} = ۲\pi \times \frac{\text{ن} + \text{ن}}{۲}$$

$$(۲) \text{ حجم } = \pi \times \text{ر} \times \text{ج} = \pi \times \text{ر} \times \frac{\text{ن} + \text{ن}}{۲}$$

جہاں ن اور ن بالترتیب ناقص اسطوانہ کے اعظم اور اقل ارتفاعوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

محروط

۲۹۔ تعریف، قائم مستطیر محروط وہ مجسم ہے جو مثلث قائم الزاویہ کو اس کے ایک ضلع کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتا ہے، زاویہ قائمہ کے احاطہ کرنے والے اضلاع میں سے ہم کسی ایک ضلع کو محور مان سکتے ہیں۔ مثلاً اگر مثلث قائم الزاویہ Δ ب ج کے ضلع Δ ب کو محور مان کر ثابت کر دیا جائے اور مثلث کو



اس کے گرد گھمایا جائے تو وتر Δ ج کے گھومنے سے محروط کی منحنی سطح پیدا ہوگی دیکھو شکل۔ وتر Δ ج کو جو اپنے سب مقامات میں ثابت

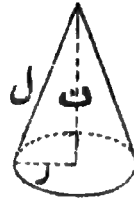
نقطہ Δ میں سے گذرتا ہے سطح کا منکونی خط کہتے ہیں، نیز جس دائرہ کو نصف قطر Δ ج مرسم کرتا ہے اس کو محروط کا قاعدہ کہتے ہیں۔ نقطہ Δ اس کہلاتا ہے اور زاویہ Δ ج کو (جو گھومنے سے

ثلث کے زاویہ اور کا دو چند ہے) راسی زاویہ کہتے ہیں۔
مخروط کا ارتفاع محور اور اب کا طول ہے اور مائل ارتفاع
وتر اوج ہے۔

اگر قائم مستدیر مخروط کو قاعدہ کے متوازی ایک مستوی سطح سے
کاٹا جائے تو ہر صورت میں تراش دائرہ ہوگی، نیز اگر اس مخروط
کو راس میں سے گزرنے والی ایک مستوی سطح سے کاٹیں تو
ہر صورت میں تراش متقاطع مستقیم خطوں کا ایک زوج ہوگی۔
۳۰۔ بالعموم اگر ایک تکوینی خط اس طرح حرکت کرے کہ وہ
ایک ثابت نقطہ میں سے ہمیشہ گزرے اور اٹھائے حرکت
میں ایک رہنمائی کرنے والے ثابت منحنی پر (جو اسی سطح میں
واقع نہ ہو جس پر خط مذکور واقع ہے) علی السلسل پھسلتا جائے
تو اس طرح سے جو سطح یہ مرتبہ کرے گا اس کو مخروطی سطح
کہتے ہیں۔ قائم مستدیر اسطوانہ کی صورت میں رہنمائی کرنا والا
منحنی یعنی قائم ایک دائرہ ہے اور اگر اس دائرہ کے
مرکز میں سے ایک خط کھینچیں جو دائرہ کی سطح پر عمود
ہو تو اس خط پر کا کوئی نقطہ مخروط کا راس ہو سکتا
ہے۔

اگر اس کے خلاف ذکر نہ ہو تو کتاب کے اس
حصہ میں صرف قائم مستدیر مخروطوں پر بحث
ہوگی۔

۱۔ مخروط کی سطح اور حجم دریافت کرو۔



ایک قائم مضلع مخروط پر غور کرو جس کا قاعدہ ایک منظم کثیر الاضلاع ہے۔

اگر قاعدہ کی تعداد اضلاع کو لا انتہا بڑھایا جائے تو کثیر الاضلاع ایک دائرہ ہو جائیگا اور مخروط مضلع بالآخر ایک قائم مخروط کی شکل اختیار کر لے گا، اس لحاظ سے مخروط کی منحنی سطح اور حجم کے متعلق جو جملات مطلوب ہیں وہ مخروط مضلع کے متناظر جملات (صفحات ۸۹، ۹۳) سے حاصل ہو سکتے ہیں پس اگر مخروط کا عمودی ارتفاع 'ف' ہو، ماثل ارتفاع 'ل' اور قاعدہ کا نصف قطر 'ر' تو

(۱) مخروط کی منحنی سطح = $\frac{1}{2} (\text{قاعدہ کا محیط}) \times \text{ماثل ارتفاع}$

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times l$$

$$= \pi r l$$

چونکہ ایک مضلع مخروط کا حجم ایک ایسے منشور کے حجم کا ایک تہائی ہوتا ہے جس کا قاعدہ اور ارتفاع دونوں مضلع ہوں جو منشور کے ہیں اس لئے

اس کے متناظر اسطوانہ کے حجم کا ایک تہائی ہو گا۔ پس

$$\text{مخروط کا حجم} = \frac{1}{3} (\text{قاعدہ کا رقبہ}) \times (\text{ارتفاع})$$

$$= \frac{1}{3} \pi R^2 \times H$$

$$= \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

نوٹ ۱۔ کل سطح = منحنی سطح + قاعدہ کا رقبہ

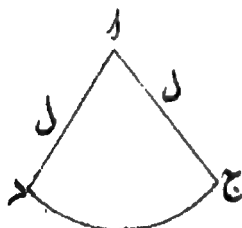
$$= \pi R L + \pi R^2$$

$$= \pi R (L + R)$$

نوٹ ۲۔ ایک ایسے مائل مخروط کا حجم جو کسی قاعدہ پر کھڑا ہو
مائل مضلع مخروط کے حجم کی طرح ضابطہ ذیل سے حاصل ہو سکتا
ہے،

$$\text{حجم} = \frac{1}{3} (\text{قاعدہ کا رقبہ}) \times (\text{عمودی ارتفاع})$$

نوٹ ۳۔ مخروط کی منحنی سطح کے متعلق جو ضابطہ اوپر دیا گیا ہے
اس کی توضیح اس طرح ہو سکتی ہے



فرض کرو کہ مخروط کی سطح کو مکھوئی خط 'ج' پر کاٹ کر ایک
مستوی سطح پر بچھا دیا گیا ہے، ظاہر ہے کہ سطح مذکور ایک ایسے

قطاع دائرہ کی شکل اختیار کرے گی جس کا نصف قطر ۱ ج مخروط کا ارتفاع مان لیا ہوگا اور جس کی قوس ج ۵ مخروط کے قاعدہ کے محیط کے مساوی ہوگی۔

پس منحنی سطح = $\frac{1}{4} \times \text{قوس ج ۵} \times \text{نصف قطر ۱ ج}$

$$= \frac{1}{4} \times 2\pi \times 1 \times 5$$

اس سے معلوم ہوا کہ قائم مستدیر مخروط کی منحنی سطح قابل استواء

ہے۔

مشقیں

۱۔ ایک قائم مستدیر مخروط کی سطح 'س'، حجم 'ح'، ارتفاع 'ف'، قاعدہ کا نصف قطر 'ر' اور راسی زاویہ کا نصف 'عہ' ہے، ذیل کے ضابطوں کو ثابت کرو

$$(۱) \text{ س } = \frac{\pi \times \text{مس عہ}}{\text{جہ}} = \text{ح} = \frac{1}{4} \times \pi \times \text{ف} \times \text{مس عہ}$$

$$(۳) \text{ س } = \frac{\pi \times \text{ر}}{\text{جہ عہ}} = \text{ح} = \frac{1}{4} \times \pi \times \text{ف} \times \text{مس عہ}$$

اس لئے ثابت کرو کہ جن مخروطوں کے راسی زاوے مساوی ہوں ان کے جموں کو آپس میں وہی نسبت ہوتی ہے جو ان کے ارتفاعوں کے کعبوں کو آپس میں ہو۔

۲۔ ذیل کے مخروطوں کی سطحیں قریب ترین مربع سنتی میٹرنگ اور حجم قریب ترین کعب سنتی میٹرنگ دریافت کرو۔

(۱) $۶ =$ سنتی میٹر، $۱۰ =$ سنتی میٹر

(۲) $۱۵۲ =$ سنتی میٹر، $۳۵ =$ سنتی میٹر

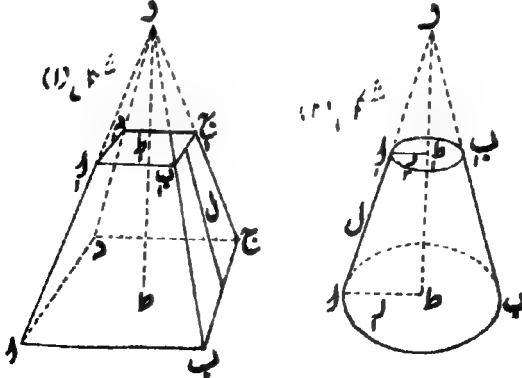
۳۔ ایک مخروط کا ارتفاع ۴۰ سنتی میٹر اور اس کے قاعدہ کا قطر ۱۸ سنتی میٹر ہے، قریب ترین مربع سنتی میٹر تک اس کی کل سطح دریافت کرو۔

۴۔ ایک مخروط کا مائل ارتفاع ۵۱۱ سنتی میٹر ہے اور عمودی ارتفاع ۴۵۵ سنتی میٹر، قریب ترین مکعب سنتی میٹر تک اس کا حجم دریافت کرو۔

[مخروطوں پر مزید مشقوں کے لئے دیکھو صفحہ ۱۲۷]

مخروط ناقص اور مضلع مخروط ناقص

۳۲۔ تعریف۔ اگر ایک مخروط یا مخروط مضلع کو قاعدہ کے متوازی ایک مستوی سطح سے کاٹیں تو ہر صورت میں قاعدہ اور مستوی سطح کے درمیان مجسم کا جو حصہ کٹتا ہے اس کو بالترتیب مخروط ناقص اور مضلع مخروط ناقص کہتے ہیں۔



مثلاً شکل (۱۱) میں مضلع مخروط (و، ا ب ج د) کا جو حصہ قاعدہ ا ب ج د اور متوازی تراش ا ب ج د کے درمیان ہے اسکو مضلع مخروط ناقص کہیے۔

شکل (۲) میں مخروط ناقص، مخروط (و، ا ب) کا وہ حصہ ہے جو قاعدہ ا ب اور متوازی تراش ا ب کے درمیان ہے۔
 شکل (۱) میں ا ب ج د، ا ب ج د کو مضلع مخروط ناقص کے سرے کہتے ہیں، اسی طرح شکل ۲ میں مخروط ناقص کے سرے ا ب، ا ب ہیں۔ ہر مضلع مخروط ناقص کے سرے متشابه شکلیں ہیں (دفعہ ۱۳، صفحہ ۷۲) ، مخروط ناقص کے سرے دائرے ہیں۔

مضلع مخروط ناقص کی مائل سطح منحرف شکلوں سے بنی ہوئی ہے، اگر قاعدہ ا ب ج د ایک منتظم شکل ہو اور مضلع مخروط قائم ہو تو یہ منحرف اشکال سب مساوی ہوں گی۔
 ۳۳۔ فرض کرو کہ مضلع مخروط ناقص کے سروں میں رقبہ کی ق اور ق اکائیاں ہیں اور راس و سے سروں پر عمود نکالا گیا ہے جو ان کو بالترتیب نقاط ط اور ط پر کاٹتا ہے، تو (دفعہ ۱۳، صفحہ ۷۲) پر یہ ثابت ہو چکا ہے کہ

$$ق : ق = و ط : و ط$$

۳۴۔ قائم مضلع مخروط ناقص کا قاعدہ ن اضلاع کا ایک منتظم کثیرالاضلاع ہے، مجسم کی مائل سطح اور حجم دریافت کرو۔

دفعہ ۳۲ کی شکل اول میں فرض کرو کہ ناقص کی موٹائی ط ط، ک کے مساوی ہے، اور اس کے سروں کے متناظر اضلاع کے کسی زوج ب ج، ب ج کے طول ل، ل ہیں۔ نیز فرض کرو کہ ان ضلعوں کا عمودی فاصلہ ایک دوسرے سے (یعنی ناقص کی مائل موٹائی) ل ہے، اور سروں ل ب ج د، ل ب ج د کے رقبے ق، ق ہیں تو

(۱) مضلع مخروط ناقص کی مائل سطح = مخروط ب ج ب کان گ

$$= \frac{1}{2} (ل + ل) ل \times ن$$

$$= \frac{1}{2} (ن ل + ل ن) ل \text{ رقبہ کی اکائی}$$

$$= \frac{1}{2} (\text{سروں کے محیطوں کا محل جمع}) \times$$

مائل موٹائی

(۲) ارتفاع و ط، و ط کو بالترتیب ف، ف سے تعبیر

کرؤ تب ف - ف = ک

$$\text{اب } \frac{ق}{ف} = \frac{ق}{ف} = م \text{ جہاں } م \text{ مستقل ہے}$$

$$\therefore ق = م ف \text{ اور } ق = م ف$$

اسلئے مضلع مخروط ناقص کا حجم = مضلع مخروط (و، ل ب ج د)

- مضلع مخروط (و، ل ب ج د)

$$= \frac{1}{2} ق ف - \frac{1}{2} ق ف$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} (\pi r^2 - \pi r'^2) \quad \text{م} \\
 &= \frac{1}{3} (\pi r^2 - \pi r'^2) (\pi r^2 + \pi r'^2 + \pi r r') \quad \text{م} \\
 &= \frac{1}{3} \pi r^2 (\pi r^2 + \pi r'^2 + \pi r r') \quad \text{م} \\
 &= \frac{1}{3} \pi r^2 (\pi r^2 + \pi r'^2 + \pi r r') \quad \text{م}
 \end{aligned}$$

۳۵۔ قائم مخروط ناقص کی منحنی سطح اور حجم دریافت کرو۔
 قائم مخروط ایک ایسے قائم مضلع مخروط کی انتہائی شکل خیال
 کیا جاسکتا ہے، جس کا قاعدہ ایک منتظم کثیر الاضلاع ہو،
 اس طرح سے مخروط ناقص کی منحنی سطح اور حجم کے متعلق
 جو جملے مطلوب ہیں وہ مضلع مخروط ناقص (دفعہ ۳۴) کے
 متناظر جملوں سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

دفعہ ۳۴ کی شکل (۲) میں فرض کرو کہ سروں AB اور
 ab کے نصف قطر AP اور ap ہیں، نیز موٹائی

$$P = \frac{1}{2} (A + a) \quad \text{ک اور مائل موٹائی } L = \frac{1}{2} (A + a)$$

$$تب \quad \pi R^2 = \pi r^2 \quad \text{اور} \quad \pi R^2 = \pi r^2$$

(۱) مخروط ناقص کی منحنی سطح = $\frac{1}{2} \pi (R + r) L$ (سروں کے محیطوں کا مجموعہ) \times (مائل موٹائی)

$$= \frac{1}{2} \pi (R + r) L$$

$$= \pi (R + r) L \quad \text{رقبہ کی اکائیاں}$$

$$(۲) \text{ مخروط ناقص کا حجم } = \frac{1}{3} \pi R^2 L \left[1 + \frac{r^2}{R^2} + \frac{r}{R} \right]$$

$$= \frac{\pi}{3} [\pi r^2 + \pi r \times \pi r + \pi r^2]$$

$$= \frac{\pi}{3} [r^2 + r^2 + r^2] \text{ حجم کی اکائیاں}$$

نوٹ ۱۔ چونکہ $r + r =$ اس مستدیر تراش کے نصف قطر کا دو چند جس کے عمود می فاصلے دونوں سروں سے

ساوی ہیں
اس لئے مخروط ناقص کی منحنی سطح $= \pi (r + r) l = \pi r l$
= (وسطی تراش کا محیط) (مائل ہوائی)

نوٹ ۲۔ اگر سروں کے رقبے Q ، Q ہوں اور وسطی تراش کا رقبہ Q ہو تو

$$\text{مخروط ناقص کا حجم} = \frac{\pi}{3} (r^2 + r^2 + r^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} (r^2 + r^2 + r^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} (r^2 + r^2 + r^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} \left\{ r^2 + \left(\frac{r^2 + r^2}{2} \right) + r^2 \right\}$$

$$= \frac{\pi}{4} (Q + Q + Q)$$

اس آخری نتیجہ کو ضابطہٴ منشور نما کہتے ہیں، یہ ہر ایک ایسے مجسم کی صورت میں درست ہے جس کے سرے متوازی شکلیں ہوں (ضروری نہیں کہ متشابہ بھی ہوں) اور ان شکلوں کی تعداد اضلاع ایک ہی ہونے کے علاوہ ان کے متناظر اضلاع کا ہر ایک زوج متوازی ہو۔ ایسے مجسم کو منشور نما کہتے ہیں اور مخروط ناقص، مقلع مخروط ناقص اس کی خاص صورتیں ہیں۔

مشقیں

مقلع مخروط ناقص اور مخروط ناقص کے متعلق

- ۱۔ ایک مقلع مخروط ناقص کے سرے شکل میں مربع ہیں اور ان کے اضلاع ۲ سنتی میٹر اور ۴ سنتی میٹر ہیں، اگر ناقص کی موٹائی ۱۵ سنتی میٹر ہو تو اس کی مائل سطح دریافت کرو۔
- ۲۔ ایک مخروط ناقص کی مائل موٹائی ۵ سنتی میٹر ہے اور اس کے سمیر سروں کے قطر ۸ سمر اور ۶ سمر ہیں، اس مخروط کی سطح دریافت کرو۔
- ۳۔ ایک مقلع مخروط ناقص کے سرے شکل میں مربع ہیں اور ان مربعوں کے اضلاع بالترتیب ۸ سمر اور ۶ سمر ہیں، اگر ناقص کی موٹائی ۳ سمر ہو تو اس کا حجم دریافت کرو۔
- ۴۔ ایک مخروط ناقص کی مائل موٹائی ۵ سنتی میٹر ہے اور اس کے سروں کے نصف قطر بالترتیب ۴ سمر اور ۱ سمر ہیں، ناقص کی سطح قریب ترین مربع سنتی میٹر تک اور اس کا حجم

قریب ترین کعب سنتی میٹر تک دریافت کرو۔

۵۔ ایک مضلع مخروط ناقص کے سرے مربع شکل کے ہیں اور ان کے اضلاع بالترتیب ۸۶۰ سمر اور ۱۴۴ سمر ہیں، اگر ناقص کی موٹائی ۵۶۶ سمر ہو تو قریب ترین مربع سنتی میٹر تک اس کی مائل سطح دریافت کرو۔

۶۔ ایک مضلع مخروط ناقص کے سرے مثلث شکل کے ہیں، قاعدہ کے اضلاع ۱۳ سمر، ۱۲ سمر، ۵ سمر ہیں اور چوٹی کے ۶۱۵ سمر، ۶ سمر، ۲۱۵ سمر، اگر ناقص کی موٹائی ۸ سمر ہو تو اس کا حجم دریافت کرو۔

۷۔ ایک مخروط ناقص کے سروں کے نصف قطر $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ ہیں اور اس کا ارتفاع $\frac{1}{2}$ ہے، ثابت کرو کہ اس کا حجم ایک اسطوانہ اور ایک مخروط کے جموں کے حاصل جمع کے مساوی ہے جہاں اسطوانہ اور مخروط کے ارتفاع $\frac{1}{2}$ برابر ہیں اور ان کے قاعدوں کے نصف قطر بالترتیب $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$) اور $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$) ہیں۔

۸۔ ایک مخروط ناقص کے سروں کے جو نصف قطر ہیں ان کا وسط تناسب مخروط ناقص کے ارتفاع کا نصف ہے، ثابت کرو کہ مائل ارتفاع نصف قطروں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

۹۔ ایک مخروط کا ارتفاع $\frac{1}{2}$ سمر ہے، قاعدہ سے اس کے فاصلہ پر اس کے متوازی ایک مستوی سطح مخروط کو کاٹتی ہے، معلوم کرو کہ اس طرح سے جو ناقص مخروط حاصل ہوتا ہے اس کا حجم کل مخروط کے حجم کی کونسی کسر ہے۔

۱۰۔ ایک مضلع مخروط ناقص کے سرے مربع شکل کے ہیں، ناقص کی موٹائی ۶ سمر ہے اور اس کے ایک سرے کا رقبہ دوسرے کے رقبہ کا چار گنا ہے، اگر اس کا حجم ۳۵۰ مکعب سنتی میٹر ہو تو سروں کے اضلاع دریافت کرو۔

مشقیں

(متفرق مثالیں مخروطوں پر)

- ۱۔ ایک مثلث اب ج میں $\angle = 60^\circ$ سمر ہے اور اگر ج سے اب پر عمود نکالا جائے تو اس کا طول ۱۶ سمر ہوتا ہے، اس مثلث کو ضلع اب کے گرد گھمانے سے جو دوسرا مخروط طائل ہوتا ہے اس کا حجم قریب ترین مکعب سنتی میٹر تک دریافت کرو۔
- ۲۔ دبیز کپڑے کا ایک ایسا مخروطی خیمہ بنانا مقصود ہے جس کا عمودی ارتفاع ۳۰ فٹ ہو اور جو ۱۳۸۶ مربع فٹ زمین گھیرے، اگر کپڑے کا عرض ۱ گز ہو تو قریب ترین فٹ تک دریافت کرو کہ کتنا کپڑا درکار ہو گا۔
- ۳۔ ایک مخروطی خیمہ ۸۰ سنتی میٹر قطر کے مستطیل قاعدہ پر کھڑا ہے اور اس کے اندر ۴۸، ۹۰ مکعب میٹر ہوا ہے اس کا ارتفاع ایک میٹر کے قریب ترین دسویں حصہ تک دریافت کرو۔

۴۔ ایک ٹھوس کعب کا کنارہ ۲۰ سم ہے، اس کعب میں سے بڑے سے بڑا مخروط اس طرح کاٹا گیا ہے کہ اس کا قاعدہ اسی سطح پر واقع ہوتا ہے جس پر کعب کا قاعدہ ہے، مخروط کی کل سطح قریب ترین مربع سنی میٹر تک دریافت کرو۔

۵۔ اسطوانہ کی شکل کے ایک نل میں سے جس کا قطر ۵ ملی میٹر ہے پانی ۱۰ میٹر فی منٹ کی رفتار سے بہتا ہے، بتاؤ کہ یہ نل ایک ایسے مخروطی ظرف کو کتنی دیر میں بھر دے گا جس کی گہرائی ۲ سم ہو اور جس کی دیر کی سطح کا قطر ۴ سم ہو۔

۶۔ ایک مخروط کو ایک مستوی سطح سے قاعدہ کے متوازی کاٹا گیا ہے، مخروط ناقص کی سطح پورے مخروط کی سطح کی نسبت ہے، بتاؤ کہ مستوی سطح مخروط کے ارتفاع کو کس نسبت سے تقسیم کرتی ہے۔

۷۔ ایک ٹھوس اسطوانہ کا ارتفاع ۴ سم ہے اور قطر ۴ سم، اس کے اندر ایک مخروطی جوف بنایا گیا ہے جس کا قاعدہ اور ارتفاع بالترتیب وہی ہے جو اسطوانہ کا۔ باقی مجسم کی کل سطح قریب ترین مربع سنی میٹر تک دریافت کرو۔

۸۔ ایک مخروطی ظرف کو جس کی گہرائی ۵ سم، سنی میٹر ہے اور جس کی اوپر کی سطح کا قطر ۲۰ سم ہے پانی سے بھر دیا گیا ہے، اگر ظرف میں سے اتنا پانی نکالا جائے

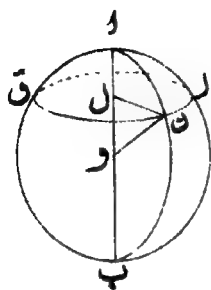
کہ اس کی گہرائی بقدر ۶۵۰ سمر کے کم ہو جائے تو قریب ترین مربع ملی میٹر تک ظرف کی اس سطح کا رقبہ دریافت کرو جو پانی کے ہٹ جانے سے خالی ہوگئی ہے۔

۹۔ ایک مخروطی ظرف دوسرے مخروطی ظرف کے اندر اس طرح رکھا گیا ہے کہ ان کے راس اور محور مشترک ہیں، مشترک راس نیچے کی طرف ہے اور مشترک محور افق پر عمود ہے۔ اندرونی ظرف کو تیل سے اور بیرونی ظرف کے باقی حصہ کو پانی سے ایک ہی ارتفاع تک بھر دیا گیا ہے۔ اگر تیل اور پانی کی سطحوں کے قطر بالترتیب ۷۵۰ سمر اور ۱۱۶۷ سمر ہوں تو تیل اور پانی کے وزنوں کی باہمی نسبت دریافت کرو جبکہ تیل کی کشافت اضافی ۰.۹۲ ہو۔

۱۰۔ ایک ٹھوس اسطوانہ کا طول ۱۰ سمر اور قطر ۸ سمر ہے، اس کے اندر ہر سرے پر ایک مخروطی جوف بنایا گیا ہے جس کا قطر ۶ سمر ہے اور ارتفاع ۴ سمر، باقی مجسم کی کل سطح قریب ترین مربع سنتی میٹر تک دریافت کرو۔

کرہ

۳۶۔ تعریف۔ کرہ وہ مجسم ہے جو نصف دائرہ کو اس کے قطر کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتا ہے جبکہ قطر کو بطور محور ثابت کر دیا جائے۔



مثلاً اگر نصف دائرہ ا ب ب
کو قطر ا ب کے گرد گھمائیں تو
نصف محیط ا ب ب ایک کرہ
کی سطح مرتسم کرے گا۔

نیز جب نصف محیط قطر کے گرد
گھومتا ہے تو محیط پر کا ہر نقطہ
مرکز سے مستقل فاصلہ پر رہتا ہے

اس لئے معلوم ہوا کہ ایک ایسے نقطہ کا طریق یا مکان جو فضا
میں حرکت کرتا ہے اور اثناے حرکت میں ایک ثابت نقطہ
سے مستقل فاصلہ پر رہتا ہے ایک کرہ کی سطح ہے۔
ثابت نقطہ کو کرہ کا مرکز اور مستقل فاصلہ کو نصف قطر
کہتے ہیں، قطر وہ خط مستقیم ہے جو مرکز میں سے گذرتا ہے
اور دونوں طرف کرہ کی سطح پر ختم ہوتا ہے، پس سب قطر
ایک دوسرے کے مساوی ہوتے۔

۳۷۔ کرہ کی ہر مستوی تراش دائرہ ہوتی ہے۔

شکل بالا میں فرض کرو کہ ایک سطح مستوی ق ن ل
کرہ کو کاٹتی ہے، اور کرہ کا مرکز و ہے اور نصف قطر
ل۔ نیز فرض کرو کہ خط تراش پر کوئی نقطہ ن ہے۔

کاٹنے والی سطح پر عمود و ل نکالو اور فرض کرو کہ
اس کا طول ط ہے، و ن، ن ل کو ملاؤ

اب چونکہ مستوی ق ن ل میں و ل، ل ن پر عمود ہے

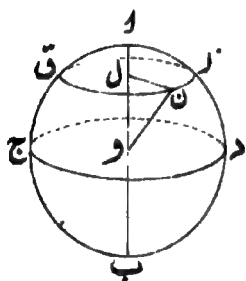
ن ل = ون - ول

$$= ر - ط$$

ن ل = ر - ط = مستقل مقدار

اس لئے ن کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز ایک ثابت نقطہ

ل ہے
تعریف قطر اب کو جو مستوی تراش ق ن ل پر عمود ہے
تراش کا محور کہتے ہیں اور اس کے سرے اب تراش
قطب کہلاتے ہیں۔



۳۸۔ اگر مستوی تراش کرہ کے
مرکز میں سے گزرے تو ل مرکز
و پر منطبق ہوگا اور اس صورت
میں دائرہ ق ن ل کا نصف
قطر بڑے سے بڑا ہوگا یعنی کرہ
کے نصف قطر کے مساوی ہوگا۔

جس خط پر مرکز میں سے گزرنے والی مستوی تراش
کرہ کو کاٹتی ہے اس کو دائرہ کبیر کہتے ہیں، باقی سب
مستوی تراشیں صغیر دائرے کہلاتی ہیں۔

۳۹۔ ایک کرہ کا نصف قطر ل ہے، اگر اس کی ایک
مستوی تراش کا نصف قطر ل ہو اور اس تراش کا فاصلہ
مرکز سے ط ہو تو یہ ثابت ہو چکا ہے کہ

$$ل = ر - ط$$

پس اگر یہ مستوی تراش مرکز و سے باہر کی طرف اپنے متوازی حرکت کرے تو ط کے بڑھنے سے ل گھٹیکا پس اگر ایک کرہ کی مستوی تراش کا فاصلہ مرکز سے بڑھتا جائے تو اس تراش کا نصف قطر بتدیج گھٹتا جائے گا اور بالآخر جب ل نقطہ ل پر منطبق ہوگا، تو ل معدوم ہو جائے گا یعنی اس وقت مستوی سطح کرہ کو صرف ایک نقطہ ل پر قطع کرے گی، اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ مستوی سطح اس حالت میں نقطہ ل پر کرہ کی مماسی سطح ہے، پس معلوم ہوا کہ کرہ کی سطح کے کسی نقطہ پر صرف ایک مماسی سطح ہو سکتی ہے اور یہ وہ مستوی سطح ہوتی ہے جو نقطہ مذکور میں سے گزرنے والے نصف قطر پر عمود ہو۔

۴۔ اگر مماسی سطح میں اس کے نقطہ تماس میں سے ایک مستقیم خط کھینچا جائے تو وہ کرہ کی سطح کو صرف ایک نقطہ پر ملیگا، اس کو یوں بیان کرتے ہیں کہ یہ خط کرہ کو اس نقطہ پر مس کرتا ہے، پس کرہ کے کسی نقطہ پر بے شمار مماسی خط کھینچے جا سکتے ہیں اور ان میں سے ہر ایک اس نقطہ میں سے گزرنے والے نصف قطر پر عمود ہوتا ہے۔ پس اگر ایک مماسی خط کو اس کے نقطہ تماس میں سے گزرنے والے نصف قطر کے گرد گھمایا جائے تو ظاہر ہے کہ اس کے گھومنے سے مماسی سطح

پیدا ہوگی۔

۴۱۔ اگر اب ایک کرہ کا قطر ہو تو ایسا دائرہ کبیر صرف ایک ہو سکتا ہے جس کا محور اب ہو اور ایسے کبیر دائرے بشمار ہو سکتے ہیں جو قطبین اب اور ب میں سے گزریں۔

۴۲۔ کرہ پر کے دو مفروضہ نقطوں میں سے (جو ایک قطر کے سرے نہ ہوں) ایک اور صرف ایک کبیر دائرہ کھینچ سکتا ہے کیونکہ دائرہ کے مرکز اور ان دو نقطوں میں سے گزرنے والی مستوی سطح صرف ایک ہو سکتی ہے جو کرہ کو ایک کبیر دائرہ پر کاٹے۔

نوٹ۔ کرہ کی سطح پر کے دو نقطوں میں سے جو کبیر دائرہ گزرتا ہے اس کی چھوٹی قوس کو ان نقطوں کا کروی فاصلہ کہتے ہیں، یہ آگے (صفحہ ۱۵۵ پر) ثابت کیا جائے گا کہ یہ قوس چھوٹے سے چھوٹا خط ہے جو ان نقطوں کے درمیان کرہ کی سطح پر کھینچی جاسکتا ہے۔ اب چونکہ کرہ کے سب کبیر دائرے مساوی ہوتے ہیں اس لئے کسی کبیر دائرہ کی ایک قوس اس زاویہ سے تعبیر ہو سکتی ہے۔ جو قوس مذکور کے محاذی مرکز پر بنتا ہے

[مسئلہ اثباتی ۶۹، اسکول جو میٹری]

پس شکل دفعہ ۳۸ میں نقاط ق اور ج کا کروی فاصلہ زاویہ ق و ج سے تعبیر ہو سکتا ہے اور درجوں میں ناپا جاسکتا ہے کبیر دائرہ ج د پر کے کسی نقطہ کا کروی فاصلہ قطب د سے ۹۰ ہے۔

۳۴۔ کرہ کی سطح پر کے کسی تین نقطوں میں سے صرف ایک دائرہ (مفروضہ نہیں کہ یہ کبیر ہو) کرہ کی سطح پر کھینچ سکتا ہے کیونکہ ان تین نقطوں سے صرف ایک مستوی سطح کا تین ہوگا جو کرہ کو ان نقطوں میں سے گزرنے والے ایک دائرہ پر کاٹے گی۔

۳۴۔ دو نقاط مفروضہ میں سے لا انتہا کرے گذر سکتے ہیں اور ان سب کے مرکز ایک ثابت مستوی سطح پر واقع ہوتے ہیں

اگر قی اور ر مفروضہ نقطے ہوں تو ظاہر ہے کہ وہ سب نقطے جوق اور ر سے متساوی الفصل ہوں ایک مستوی سطح پر واقع ہوں گے جو مستقیم خط قی کی زاویہ قائمہ پر تنصیف کرے گی۔ اس لئے اس سطح پر کے کسی نقطہ کو مرکز مان کر ایک کرہ کھینچ سکتا ہے جوق اور ر میں سے گزرے۔

۳۵۔ تین نقاط مفروضہ میں سے لا انتہا کرے گذرتے ہیں اور ان کے مرکز ایک ثابت مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں

شکل دفعہ ۳۸ میں فرض کرو کہ تین نقطے ن، ق، ر ہیں اور ان میں سے گزرنے والے دائرہ کا مرکز ل ہے فرض کرو کہ خط اب نقطہ ل میں سے گذرتا ہے اور ن، ق، ر کی سطح مستوی پر مود ہے۔ اب اگر اب پر کوئی

فرض کرو کہ نقاط F اور G سے مستویات ABC اور DEF پر بالترتیب عمود FN اور GN نکالے گئے ہیں۔

تب FN میں P کا ہر نقطہ ABC سے مساوی الفصل ہے، اور GN میں Q کا ہر نقطہ DEF سے مساوی فاصلہ پر ہے، اس لئے خطوط FN اور GN میں سے ہر ایک کا ہر نقطہ ABC سے مساوی فاصلہ پر ہے لیکن وہ سب نقطے جو ABC سے مساوی الفصل ہیں ایک مستوی سطح پر واقع ہوتے ہیں جو ABC کی زاویہ قائمہ پر تنصیف کرتی ہے۔

اس لئے FN میں اور GN میں دونوں اس مستوی میں واقع ہوتے ہیں اور چونکہ وہ متوازی نہیں ہو سکتے (کیونکہ وہ دو متقاطع سطوح مستویہ پر جداگانہ عمود ہیں) اس لئے وہ لازماً ایک دوسرے سے کسی نقطہ پر ملینگے۔

پس FN اور GN کا ایک ہی مشترک نقطہ و نقاط ABC ، DEF چاروں سے مساوی فاصلہ پر ہوگا۔

پس اگر O کو مرکز اور OA کو نصف قطر مان کر ایک کرہ کھینچا جائے تو وہ ABC ، DEF میں سے گزریگا اور یہ ایک ہی کرہ ہے جو ان چار نقطوں میں سے

گزر سکتا ہے۔

مشقیں کر کے متعلق

(نظری)

۱۔ دو ہم مرکز کروں میں اندرونی کوہ کی کوئی ماسی سطح بیرونی کوہ کو ایک ایسے دائرہ پر کاشتی ہے جس کا نصف قطر مستقل ہوگا۔
۲۔ کوہ کی سطح پر ان سب نقطوں کا طریق دریافت کرو جو ایک نقطہ مفروضہ N سے مستقل فاصلہ پر ہوں، مختلف صورتوں میں جب N کوہ کے اندر، اوپر یا باہر ہو شکلوں کے ذریعہ اس کی توضیح کرو۔

۳۔ دو کروں کے نصف قطر r ، R ہیں اور ان کے مرکبوں کا باہمی فاصلہ d سمر ہے، کیا شرائط ہیں کہ یہ کتبے ایک لکیر کے کو
(۱) مس کریں (۲) قطع کریں۔

اگر کتبے قطع کریں تو ثابت کرو کہ ان کا خط تراش ایک دائرہ کا محیط ہے۔

۴۔ ایک نقطہ بیرونی سے کوہ کے کتنے ماسی خط کھنچ سکتے ہیں؟ ان خطوں سے کیسی سطح پیدا ہوتی ہے؟ ثابت کرو کہ یہ سب خط ایک دوسرے کے برابر ہیں، نیز ان کے نقاط تماس کا طریق دریافت کرو۔

۵۔ ایک ثابت کوہ کو مستوی سطحوں سے کاٹا گیا ہے جو

سب کی سب ایک نقطہ مفروضہ میں سے گذرتی ہیں، تراشوں کے مرکوزوں کا طریق دریافت کرو۔ اُن صورتوں میں تمیز کرو جبکہ نقطہ مفروضہ ثابت کرہ کے (۱) اندر (۲) اوپر (۳) باہر واقع ہو۔
 ۶۔ ایک ثابت نقطہ و کو ایک مستوی سطح کے کسی نقطہ ن سے ملایا گیا ہے جو و میں سے نہیں گذرتی، اور و ن ہر ایک ایسا نقطہ ق یا گیا ہے کہ و ن \times و ق = ایک مستقل مقدار، بتاؤ کہ ق کس سطح پر واقع ہو گا؟

۷۔ معلوم کرو کہ ایک ذواربعتہ السطوح (چار سطحی) کے اندر ایک ایسا کرہ کس طرح بن سکتا ہے جو اس کے ہر ایک رخ کو مس کرے۔ ثابت کرو کہ ایسے کُرے چار ہیں جو کسی ایک رخ اور باقی کے تین مغروہہ رخنوں کو مس کریں۔

۸۔ ایک منتظم ذواربعتہ السطوح کا ہر ایک کنارہ ۱۲ ہے، اس کے بیرونی اور اندرونی کرویوں کے نصف قطر م اور ل ہیں، ثابت کرو کہ

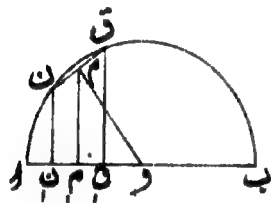
$$م = ل = \frac{1}{4}$$

۹۔ ایک مستقیم خط کا طول دیا ہوا ہے اور اس کا محل یا مقام فضا میں ثابت کر دیا گیا ہے، اُن سب نقطوں کا طریق معلوم کرو جو ایک دی ہوئی مستوی سطح پر واقع ہوں اور جن میں سے ہر ایک پر خط مذکور کے مماسی زاویہ قائمہ بنے۔

۱۰۔ اگر ایک کرہ ایک تار کے ذواربعتہ السطوح میں اس طرح رکھا جاسکے کہ وہ مجسم کے سب کناروں کو مس کرے تو ثابت کرو کہ مقابل کے کناروں کے ہر زوج کا مجموعہ ایک ہی ہے۔

۴۴۔ کرہ کی سطح دریافت کرو۔
فرض کرو کہ نصف دائرہ $ا ب$ کو قطر $ا ب$ کے گرد
گھمانے سے ایک کرہ حاصل کیا گیا ہے جس کا مرکز $و$ ہے

اور نصف قطرات
فرض کرو کہ ایک منتظم نصف کثیر الاضلاع (جس کی تعداد
اضلاع جفت ہے) نصف دائرہ کے اندر بنایا گیا ہے
اور اس کا ایک ضلع $ن ق$ ہے۔



و سے $ن ق$ پر عمود $وم$ نکالو
یہ $ن ق$ کی تنصیف کرے گا۔

$ا ب$ پر عمود $ن د$ ، $م م$ ، $ق ق$ نکالو
 $ا ب$ جیسے نصف دائرہ $ا ب$ کے گرد گھومیگا
ضلع $ن ق$ ایک مخروط ناقص کی منحنی سطح مرسم کریگا

پس اس مخروط ناقص کی منحنی سطح = $\pi r^2 \times م م \times ن ق$ [دفعہ ۳۵۳]

اب اگر $ن ق$ اور $ن د$ کا درمیانی زاویہ ط ہو تو

$$ن ق = ن ق \text{ حجم ط} = ن ق \times \frac{\pi r^2}{۴}$$

کیونکہ $م م$ اور $م و$ بالترتیب $ن ق$ اور $ن ق$ پر عمود ہیں

$$م م \times م و = ن ق \times م و$$

اس لئے مخروط ناقص کی منحنی سطح = $\pi r^2 \times م و \times ن ق$

اگر کثیر الاضلاع کی تعداد اضلاع کو لا انتہا بڑھا دیا جائے یعنی
 ن ق کے طول کو لا انتہا کم کر دیا جائے تو اس مخروط ناقص
 کی سطح بالآخر کرہ کی ایک پیٹی یا منطقہ ہو جائے گی جو قوس
 ن ق کو محور ا ب کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتی ہے۔
 نیز اس انتہائی صورت میں $د م = ر$

∴ پیٹی کا رقبہ $= ۲۲ ر \times (ن ق کا ظل ا ب پر)$

لیکن کرہ کی سطح اُن سب پیٹیوں کے رقبوں کا مجموعہ ہے
 جو متواتر اضلاع کو ا ب کے گرد گھمانے سے حاصل ہوں۔
 اور سب اضلاع کے ظلوں کا مجموعہ $= ا ب = ر$

اس لئے کرہ کی سطح $= ر \times ر \times \pi = ر^۲ \pi$
 نوٹ: یہ کرہ کی سطح اسکے کبیر دائرہ کے رقبہ کی چار گنی ہوتی ہے
 ۴۸۔ تعریف: جو حصہ متوازی مستوی سطحیں کرہ سے کاٹتی
 ہیں اس کو کرہ ناقص کہتے ہیں۔ کرہ ناقص کی منحنی سطح
 منطقہ کہلاتی ہے۔



ایک مستوی سطح کرہ کو دو
 حصوں میں کاٹتی ہے، ان
 میں سے ہر ایک حصہ کو
 قطعہ کرہ کہتے ہیں، قطعہ کی
 منحنی سطح کو بعض اوقات
 ٹوپی کہتے ہیں۔

ناقص کرہ میں اگر ایک کاٹنے والی مستوی سطح $N-N$ اپنے متوازی حرکت کرے اور بالآخر کرہ کی ماسی سطح بن جائے (دفعہ ۳۹) تو اوپر کا مستدیر سرا معدوم ہو جائے گا اور ناقص کرہ ایک قطعہ کرہ بن جائے گا۔

۴۹۔ دفعہ ۴۷ کی رو سے

منطقہ کا رقبہ $= \pi r^2$ (وہ فاصلہ جو مستوی سطحوں کے درمیان ہے)

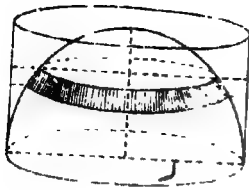
$= \pi R^2$ ر ک

جہاں R کرہ کا نصف قطر ہے اور R کرہ ناقص کی موٹائی ہے۔

یہ نتیجہ اُس صورت میں ثابت کیا گیا تھا جب موٹائی لا انتہا کم تھی، لیکن پتے منطقوں کو جمع کرنے سے یہ ضابطہ R کی تمام قیمتوں کے لئے صحیح ثابت ہو سکتا ہے۔ اسی طرح سے قطعہ کرہ کی منحنی سطح $= \pi R^2$ جہاں R کرہ کا نصف قطر ہے اور R قطعہ کرہ کا ارتفاع ہے۔

نوٹ ۱۔ چونکہ منطقہ کا رقبہ صرف کرہ کے نصف قطر اور کرہ ناقص کی موٹائی پر موقوف ہے، اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک معینہ موٹائی والے منطقہ کا رقبہ وہی ہوگا خواہ اسے کرہ کے کسی حصہ سے کاٹا جائے۔

نوٹ ۲۔ ایک اسطوانہ کرہ کے گرد بنایا گیا ہے جو دائرہ کبیر پر کرہ کو مس کرتا ہے اور دو متوازی مستوی سطحیں جو اسطوانہ کے محور پر عمود ہیں ایک کرہ ناقص کاٹتی ہیں،



تب منطقہ کا رقبہ اُس بیٹی
کے رقبہ کے مساوی ہے جو
اسطوانہ پر اس کے بالمقابل

بنتی ہے کیونکہ ہر ایک رقبہ = $\frac{1}{2} \pi R^2$ رک
اس لئے کرہ کی کل سطح اس کے گرد بنے ہوئے اسطوانہ
کی منحنی سطح کے مساوی ہے۔

۵۰۔ ایک کرہ کا نصف قطر r ہے اس کا حجم
دریافت کرو



کرہ کی سطح نہایت چھوٹے
حصوں یا اجزا میں تقسیم ہو سکتی
ہے دیکھو شکل۔ اگر رقبہ کے
ان اجزا کو لا انتہا چھوٹا یا کم
کر دیا جائے تو ان میں سے

ہر ایک بالآخر ایک مستوی سطح بن جائے گا۔ ایسے ہر ایک
جزو کو ہم ایک ایسے مینار یا مخروط مضلع کا قاعدہ فرض
کر سکتے ہیں جس کا رأس مرکز ہو اور جس کا ارتفاع کرہ کا
نصف قطر ہو۔

ایک ایسے مینار کا حجم = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ (سطح کا جزو) $\times r$

لیکن ایسے کل اجزا کا مجموعہ کرہ کی کل سطح ہے۔

اور ان اجزا کے جواب میں جو مینار بنتے ہیں ان کا مجموعہ
کرہ کا حجم ہے۔

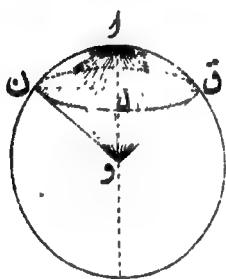
کرہ کا حجم = $\frac{1}{3} \pi r^3$ (کرہ کی سطح) $\times r$

$$= \frac{1}{3} \pi r^3 \times r$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^4$$

۵۱۔ کرہ کا نصف قطر ایک قطعہ کرہ کے کنارے پر علی التسلل حرکت کرنے سے ایک مخروطی سطح پیدا کرتا ہے، جو مجسم اس مخروطی سطح اور قطعہ کرہ کی ٹوپی سے گھرا ہوا ہے اس کو قطاع کرہ کہتے ہیں۔ [دیکھو شکل دفعہ ۵۳]

۵۲۔ دفعہ ۵۰ کے طریق عمل سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ قطاع کرہ کا حجم $\frac{1}{3} \pi r^3$ ہے جہاں r سے قطعہ کرہ کی ٹوپی کی سطح تعبیر ہوتی ہے۔



۵۳۔ قطعہ کرہ $(ن ق)$ کا حجم مجسم قطاع $(د، ن ق)$ اور مخروط $(د، ن ق)$ کے فرق کے مساوی ہے۔

فرض کرو کہ کرہ کا نصف قطر r ہے، مستدیر قاعدہ

کا نصف قطر n $= r$ اور قطعہ کرہ کا ارتفاع $ل$ $= n$

$$\text{قطعہ کا حجم} = \frac{1}{3} \pi r^3 - \frac{1}{3} \pi n^3 (r - n)$$

$$\frac{\pi}{3} = \{ ۲ ر - ف (۲ - ر) \} \dots (۱)$$

لیکن $ف (۲ - ر) = ۲$ [اسکول پیٹری سلڈ ۵] ... (۲)
مطلوبہ حجم کو $ر$ اور $ف$ کی رقوم میں حاصل کرنے کیلئے
 ۲ کی قیمت جو (۲) سے حاصل ہوتی ہے اس کو (۱) میں

مندرج کرد
اور حجم کو $ر$ اور $ف$ کی رقوم میں حاصل کرنے کیلئے
 $ر$ کی قیمت جو (۲) سے حاصل ہوتی ہے اس کو (۱) میں
مندرج کرد ہر صورت میں اختصار کرنے سے معلوم ہو گا کہ

$$\text{قطعہ کا حجم} = \frac{\pi}{3} (۲ - ر) \dots (۳)$$

$$\frac{\pi}{4} (۳ + ۲ + ف) \dots (۴)$$

۵۴۔ ناقص کرہ کا حجم ایسے دو قطعوں کے فرق کے
سادہ ہے جن کے ارتفاع $ف$ اور ۲ ہوں، اور
 $ف - ۲ = ک$ جہاں $ک$ ناقص کرہ کی موٹائی ہے۔
نتیجہ (۳) استعمال کرنے اور (۴) کے ذریعہ اس کی
تحویل کرنے سے معلوم ہو گا کہ

$$\text{ناقص کرہ کا حجم} = \frac{\pi}{4} (۳ + ۲ + ۳ + ک)$$

جہاں ۲ اور ۳ متدیر سروں کے نصف قطر ہیں۔

مشقیں کرہ کے متعلق

(عدوی)

- ۱۔ دو کروں کے نصف قطر بالترتیب (۱) ۴۶ سمر (۲) ۱۰۱۵ سمر ہیں، قریب ترین مربع سنتی میٹر تک ان کی سطیوں اور قریب ترین مکعب سنتی میٹر تک ان کے حجم دریافت کرو۔
- ۲۔ ایک نصف کروئی گنبد کا قطر ۱۲ میٹر ہے، اسٹنگ ۶ پنس فی مربع میٹر کے حساب سے اس پر سونا چڑھانے کی قیمت قریب ترین پنس تک دریافت کرو۔
- ۳۔ ایک ایسے کرہ کا نصف قطر دریافت کرو جس کی سطح ۸۰۰ سنتی میٹر قطر کے ایک دائرہ کے رقبہ کے مساوی ہے۔
- ۴۔ دھات کے ایک ٹھوس اسطوانہ کا طول ۴۵ سمر ہے اور قطر ۴ سمر، بتاؤ کہ کتنے ٹھوس کڑے جن کے قطر ۶ سمر ہوں اس اسطوانہ سے بنائے جاسکتے ہیں۔
- ۵۔ ایک کروئی خول کے اندرونی اور بیرونی نصف قطر بالترتیب ۵ سمر اور ۶ سمر ہیں، قریب ترین مکعب سنتی میٹر تک خول کا حجم دریافت کرو۔
- ۶۔ نصف کرہ کی شکل کے ایک پیالہ کی موٹائی ۱ سمر ہے، اس کا بیرونی قطر ۱۰ سمر ہے، قریب ترین مکعب سنتی میٹر

پیالہ کا کل حجم دریافت کرو۔

۷۔ دھات کا ایک ٹھوس کرہ قطر میں ۶ سمر ہے، کرہ کو دھالتے سے ایک نالی بنائی گئی ہے جس کا طول ۴ سمر ہے اور بیرونی قطر ۱۰ سمر ہے، نالی کی موٹائی دریافت کرو۔

۸۔ تانبے کے ایک نصف کردی پیالہ کی موٹائی اسمر ہے اور بیرونی قطر ۱۲ سمر، اگر تانبے کے ایک مکعب سنتی میٹر تار کا وزن ۸۸ گرام ہو تو پیالہ کی کل سطح اور وزن دریافت کرو۔

۹۔ ایک کرہ کا نصف قطر ۵ ۳ سمر ہے، اس کو ایک ایسے بچوں اسطوانہ کے اندر رکھا گیا ہے جس کا نصف قطر وہی ہے جو کرہ کا اور جس کا طول اس کے محیط کے مساوی ہے، اسطوانہ کے باقی حصہ میں مکعب سنتی میٹروں کی تعداد دریافت کرو۔

۱۰۔ ایک کرہ کی سطح ایک ایسے اسطوانہ کی کل سطح کے مساوی ہے جس کا ارتفاع ۱۶ سمر اور قطر ۴ سمر ہے، قریب ترین ملی میٹر تک کرہ کا نصف قطر دریافت کرو۔

۱۱۔ فرض کرو کہ پانی کے قطرے کردی شکل کے ہیں اور ہر قطرے کا قطر ۱/۸ انچ ہے۔ بتاؤ کہ ایسے ۵۰۰ قطرے ایک مخروطی شکل کے گلاس کو جس کا ارتفاع اس کے کنارہ کے قطر کے مساوی ہے کتنی گہرائی تک بھر دیں گے؟

۱۲۔ ۶ سنتی میٹر قطر کے ایک کرہ کو اسطوانہ کی شکل کے ایک ظرف میں جو جزیرہ پانی سے بھرا ہوا ہے ڈال دیا گیا ہے، ظرف کا قطر ۱۲ سمر ہے، اگر کرہ پانی کے اندر پورا ڈوب جائے تو معلوم کرو کہ

پانی کی سطح کتنا اوپر چڑھے گی۔

۱۳۔ دو کروں کے وزنوں کی نسبت ۱۷ : ۸ ہے اور ان کے ایک ایک مکعب فٹ کے وزنوں کی نسبت ۲۸۹ : ۶۴ ہے، کروں کے نصف قطروں کا مقابلہ کرو۔

۱۴۔ سیسے کی ... ۵۰۰ کروی گولیوں کا تقریبی وزن دریافت کرو، ہر ایک گولی کا قطر ۸ ملی میٹر ہے اور سیسے کی کثافت اضافی ۱۱۵۳۵ ہے۔

۱۵۔ تانبے کے ایک کروی خول کا وزن دریافت کرو جس کا بیرونی قطر ۱۲ سمر ہے اور جس کی موٹائی ۲ سمر ہے۔ تانبے کی کثافت اضافی ۸۸۰۸ ہے۔

۱۶۔ تانبے کی اس مقدار سے جو ۱۸ سنتی میٹر قطر کے ایک ٹھوس کرہ میں موجود ہے کتنے میٹر لمبا تار بنایا جاسکتا ہے جس کا قطر ۰.۱۴ ملی میٹر ہو۔

اگر تار کے قطر کو ۵ فیصد کم کر دیا جائے تو کتنے فیصد کے صاف سے اس کا طول بڑھ جائے گا؟

۱۷۔ ایک کروی قطعہ نصف دائرہ سے بڑا ہے اور اس کا ارتفاع ۱۸ سمر ہے اور نصف قطر ۱۳ سمر، اس کی کل سطح اور حجم دریافت کرو۔

۱۸۔ ایک کرہ ناقص کے مستوی سروں کے فاصلے مرکز کرہ سے اس کے ایک ہی جانب ۶ سمر اور ۸ سمر ہیں، اگر کرہ کا نصف قطر ۲۰ سمر ہو تو ناقص کی کل سطح اور حجم دریافت کرو۔

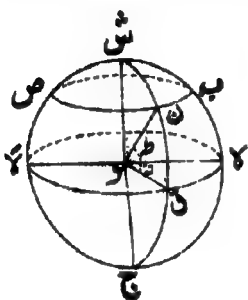
۱۹۔ ایک کروی ضلع کے سوں کے نصف قطر ۱۲ سمر اور ۵ سمر میں اور ضلع کی موٹائی ۷ سمر ہے، اس کا رقبہ دریافت کرو۔
 ۲۰۔ ایک کرہ جس کا قطر ۲۴ فٹ ہے ایسے رکھا گیا ہے کہ اس کے مرکز کا فاصلہ ایک شخص کی آنکھ سے ۳۷ فٹ ہے، کرہ کی سطح کے اس حصہ کا رقبہ دریافت کرو جو اس کو دکھائی دیتا ہے۔
 ۲۱۔ فرض کرو کہ زمین ایک کرہ ہے جس کا قطر ۸۰۰۰ میل ہے، غٹوں میں دریافت کرو کہ تقریباً کس بلندی پر سطح زمین کا ایک دس لاکھواں حصہ دکھائی دے گا۔

۲۲۔ اوب ایک ایسے دائرہ کی قوس ہے جس کا مرکز وہ ہے، ثابت کرو کہ قطاع دائرہ و اوب کو نصف قطر و ا کے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کی مغنی سطح کا رقبہ Π (دائرہ اوب) ہے۔

۲۳۔ نصف کرہ کے گرد مس کرتا ہوا ایک اسطوانہ بنایا گیا ہے اور اسطوانہ کے اندر ایک مخروط بنایا گیا ہے جس کا راس ایک سرے کے مرکز پر ہے اور جس کا قاعدہ دوسرا متدیر سرے ہے، ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{اسطوانہ کا حجم}}{۳} = \frac{\text{نصف کرہ کا حجم}}{۲} = \frac{\text{مخروط کا حجم}}{۱}$$

کرہ پر حوالہ کے خطوط عرض بلد اور طول بلد



۵۵ - اس شکل میں کرہ کا مرکز

و ہے اور اس کے ایک قطر

مش ج کو محور مانا گیا ہے۔

دائرہ کبیر لاق لاق کو جس کا

محور مش ج ہے خط استوا

کہتے ہیں اور مش اور ج بالترتیب شمالی اور جنوبی قطب

کہلاتے ہیں۔

مش ج محور ہو گا اور مش ج قطب ہو گئے ان سب

صغیر دائروں کے جن کی سطحیں خط استوا کے متوازی ہیں

فرض کرو کہ ب ن ص ایک ایسا صغیر دائرہ ہے اور اس کے

محیط پر کوئی نقطہ ن ہے۔

مش اور ج میں سے لانا انتہا کبیر دائرے کھینچے جا سکتے

ہیں، فرض کرو کہ مش ن ج ایک کبیر دائرہ ہے جو ن

میں سے گزرتا ہے اور خط استوا کو ق پر کاٹتا ہے۔

اب یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے (جیسا دفعہ ۳۴ میں)

کہ زاویہ مش و ن ان سب نقطوں کے لئے مستقل ہے جو

دائرہ صغیر ب ص کے محیط پر واقع ہوتے ہیں اس لئے

قوس مش ن ایسے سب نقطوں کے لئے مستقل ہے،

قوس شن کو نقطہ ن کا شمالی قطبی فاصلہ کہتے ہیں اور چونکہ
زاویہ مش وق = 90° اس لئے زاویہ ن وق بھی منتقل ہے۔
ن وق کو یا اس کی قوس متناظرہ ن ق کو نقطہ ن کا
عرض بلد کہتے ہیں، اور الفاظ میں اس کی تعریف یہ ہو سکتی ہے
کہ عرض بلد خط استوا سے نقطہ کا کروی فاصلہ ہے۔
چونکہ دائرہ ب ن ص کو عرض بلد کا متوازی
کہتے ہیں، کیونکہ اس کے محیط پر جو نقطے ہیں ان سب کا عرض بلد
ایک ہی ہے۔ شکل میں عرض بلد کو طہ سے تعبیر کیا گیا ہے۔
بڑے دائرے جو قطبین مش اور ج میں سے گزرتے
ہیں ان کے نصف محیطوں (جیسے شن ق ج) کو نصف النہار
کہتے ہیں۔

کسی نصف النہار کا مقام بلحاظ ایک اور ثابت نصف النہار
کے اُس زاویہ سے مقرر ہوتا ہے جو ان کی سطحوں کے درمیان
ہو، پس اگر حوالہ کا ثابت نصف النہار مش لاج ہو تو نصف النہار
شن ق ج کے مقام کا تعین زاویہ لا وق سے ہو سکتا
ہے کیونکہ ولا اور وق خط تراش مش ج پر عمود ہیں۔
زاویہ لا وق کو شکل میں ف سے تعبیر کیا گیا ہے، اس کو
نصف النہار شن ق ج کا طول بلد یا اس نصف النہار
پر کے سب نقطوں کا طول بلد کہتے ہیں۔

یہ ظاہر ہے کہ کرہ کی سطح پر کے کسی نقطہ ن کا مقام
ثابت ہو جاتا ہے اگر ہمیں یہ معلوم ہو کہ یہ عرض بلد کے کس

متوازی پر اور طول بلد کے کس نصف النہار پر واقع ہے یعنی اختصاراً اگر یہ معلوم ہو کہ اس کے عرض بلد اور طول بلد کیا ہیں یہ زاوی معطیات اُن خطی محدودوں کے جواب ہیں جن کی مدد سے ایک مستوی سطح پر کسی نقطہ کا تعین ہو سکتا ہے۔

مشقیں

۱۔ ایک کرہ کو عرض بلد پر ایک مستوی سطح سے کاٹا گیا ہے، اگر کرہ کا نصف قطر ہو اور مستدیر تراش کا مرکز ثابت کر دو کہ

$$r = R \sin \theta$$

۲۔ فرض کر دو کہ خط استوا پر زمین کا نصف قطر ۳۹۶۰ میل ہے چار ہندسوں والی جدولوں کی مدد سے تقریباً معلوم کرو

(۱) خط استوا کا طول

(۲) خط استوا کی اُس قوس کا طول جس کے محاذی زمین کے

مرکز پر زاویہ ۱ دقیقہ (سنٹ) بنتا ہے۔

(۳) عرض بلد ۵۵° پر کے متوازی کا طول

(۴) زمین کے گھومنے کے باعث لندن کتنے میل فی گھنٹہ

حرکت کرتا ہے۔ [لندن کا عرض بلد = ۵۱° ۳۰']

۳۔ عرض بلد پر ایک کرہ (نصف قطر) سے ایک مستوی سطح کے ذریعہ ایک قطعہ کاٹا گیا ہے، منوا بطور ۴۹ اور ۵۳ سے مستطیل کرو

(۱) قطعہ کرہ کی ٹوپی کی سطح = $\frac{1}{2} \pi r^2$ (۱- جب ط)

(۲) قطعہ کرہ کا حجم = $\frac{1}{6} \pi r^3$ (۱- جب ط) (۲- جب ط- جب ط)

۳۔ ثابت کرو کہ ایک کردی عقد کی سطح کا رقبہ جس کے مستوی سروں کے عرض بلد طم اور طم ہیں مضابطہ ۲۲۲ (جب طم۔ جب طم) سے مل جاتا ہے۔

۵۔ زمین کے اوسط قطر کو ۷۹۲۲ میل مان کر چار ہندسوں والی جدولوں کی مدد سے ذیل کی سطحوں کی تقریبی قیمتیں دریافت کرو۔

(۱) زمین کی کھسٹ

(۱) زمین کی سطح
(۲) سیلقہ بارود کی سطح

(۲) منطقہ بارہوی ع [واریہ بارہوی کے سرحدوں کے عرض میں ۱۰۰ میل اور چوڑائی ۱۰۰ میل ہے۔]
(۳) منطقہ حارہ کی سطح [منطقہ حارہ کے سرحدوں کے عرض میں ۱۰۰ میل اور چوڑائی ۱۰۰ میل ہے۔]

۶۔ ایک کرہ کا نصف قطر ہے، اسکی سطح پر کے کسی نقطہ (لا، ما، ی) کے

۴۔ ایک کروڑ سال تک زمین پر عرض اور طول بلدہ اور فہ ہیں، ثابت کرو کہ

لا = رجم طه رجم ف

ما = رجب طه جيب فـ

ی = ر جب طہ

پچانکوں کی منحنی سطحیں

۵۶۔ اگر دو مستوی سطحیں ایک کرہ کے مرکز میں سے

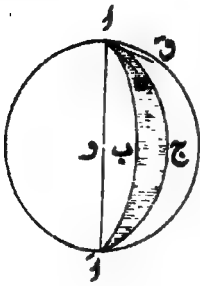
مگر یہ تو لانا وہ ایک دوسرے کو کر کے ایک قطرہ

قطع کرنگی۔

اس لئے کوئی دو کبیرہ واٹر ہے لازماً ایک دوسرے

اکو ایک قطر کے سروں پر قطع کر بیٹھے۔

میں نڈاویہ پر دو کبیر واٹرے ایک دوسرے کو قطع



کرتے ہیں اس کو گردی زاویہ
کہتے ہیں۔ اور اس کا ناپ وہ
زاویہ ہے جو کسی ایک نقطہ
تقاطع پر دائروں کے مماسوں
کے درمیان بنتا ہے۔

پس بڑے دائروں 'ا ب د'، 'ا ج د' کا درمیانی زاویہ
وہ ہے جو مماسات 'ا ن' اور 'ا ق' کے درمیان بنے، یہ مماس
بالترتیب ان دائروں کی سطحوں میں واقع ہیں اور خط تراش
'ا د' پر عمود ہیں، اس لئے ان مماسوں کا درمیانی زاویہ، مذکورہ
مستوی سطحوں کے دو سطحی زاویہ کا ناپ ہے۔

اس لئے گردی زاویہ کا ناپ وہ دو سطحی زاویہ ہے جو
مقاطع کبیر دائروں کی سطحوں کے درمیان بنے۔

۵۷۔ تعریف۔ اگر دو مستوی سطحیں ایک کرہ کے قطر پر ایک
دوسرے کو قطع کریں تو ان کے درمیان کرہ کا جو مجسم حصہ
منقطع ہوتا ہے اس کو کرہ کی پچانک کہتے ہیں۔ پچانک کی
منحنی سطح کو ہلالی سطح سے بھی موسوم کرتے ہیں، اس سے
ظاہر ہے کہ ہلالی سطح کو احاطہ کرنے والے خط دو یکسر
نصف دائرے ہوتے ہیں اور ان کے درمیان جو کرہ
زاویہ بنتا ہے اسکو پچانک کی منحنی سطح کا زاویہ کہتے ہیں۔

۵۸۔ کرہ کی پچانک کی منحنی سطح کا رقبہ دریافت کرو۔
یہ آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے پچانکوں کی منحنی سطحوں کے

رقبے ان کے کروی زاویوں کے متناسب ہوتے ہیں، نیز کرہ کی کل سطح کو ایک ایسی پیمائش کی منحنی سطح خیال کیا جاسکتا ہے جس کا زاویہ ۳۶۰° ہے۔

اس لئے اگر چھانک کی منحنی سطح کا زاویہ ۵ درجے ہو تو

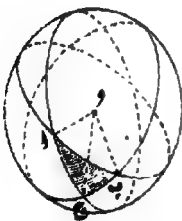
$$\text{اس کا رقبہ} = (\text{کرہ کی سطح}) \times \frac{5}{360}$$

$$= \frac{5}{90} \times 4\pi R^2$$

کروی مثلث

۵۹۔ تعریف۔ اگر کرہ کی سطح پر ایک ایسا مثلث بنایا جائے جس کے اضلاع کبیر دائروں کی قوسیں ہوں تو اس کو کروی مثلث کہتے ہیں۔

۶۰۔ اگر ایک کروی مثلث ا ب ج کے رؤسوں کو کرہ کے مرکز سے ملا یا جائے تو تین مستوی سطحیں ا ب ج، ب ج د و ا ج د نقطہ و پر ایک سہ سطحی زاویہ بناتی ہیں جس کا مثلث ا ب ج سے خاص تعلق ہوتا ہے۔



مثلاً کروی مثلث ا ب ج

کے اضلاع یا قوسوں

ا ب، ب ج، ج ا سے تعبیر

ہو سکتے ہیں یا طرفی زاویوں

اوب، بوج، جوا سے۔

پس معلوم ہوا کہ ایک کروی مثلث کے اضلاع اوب ، بوج ، جوا میں ناپے جا سکتے ہیں۔

نیز کروی زاویا اوب ، بوج کے ناپ وہی ہیں جو مجسم زاویہ (اوبج) کے وسطی زاویوں کے ہیں۔

پس کروی مثلث اور وسطی زاویہ کے اس باہمی تعلق سے ہم یہ نتائج اخذ کرتے ہیں۔

(۱) کروی مثلث کے کسی دواضلاع کا مجموعہ تیسرے ضلع سے بڑا ہوتا ہے۔

کیونکہ اوب ، اوج کے ناپ طرئی زاویے اوب ، اوج ہیں اور ان زاویوں کا مجموعہ تیسرے طرئی زاویہ بوج سے بڑا ہے [مسئلہ ۱۹]

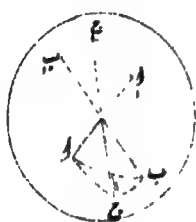
(۲) کروی مثلث کے ضلعوں کا مجموعہ بڑے دائرہ کے محیط سے کم ہوتا ہے۔

کیونکہ طرئی زاویوں اوب ، بوج ، جوا کا مجموعہ چار قانوں سے کم ہے (مسئلہ ۲۰) اس لئے ان کی متناظر قوسوں کا مجموعہ چار ربعوں سے کم ہے۔

نوٹ۔ پہلے نتیجہ سے ظاہر ہے کہ ایک کروی کثیرالاضلاع کا کوئی ضلع باقی ضلعوں کے مجموعہ سے کم ہوتا ہے اور اس لئے کرہ کی سطح پر دو نقطوں کے درمیان چھوٹے سے چھوٹا خط اس کثیر دائرہ کی چھوٹی قوس ہے جو ان نقطوں میں سے گزرتا ہے، کیونکہ کوئی اور خط

کیر دائروں کی نہایت ہی چھوٹی قوسوں کا مجموعہ خیال کیا جاسکتا ہے جبکہ ہر ایک قوس کو لا انتہا کم کر دیا جائے۔

۶۱۔ کردی مثلث Δ ب ج کے رأسوں میں سے جو قطر Δ ب Δ ج سے گزرتے ہیں وہ کرہ کی سطح کو ایک کردی مثلث Δ ب ج کے رأسوں پر ملتے ہیں، مثلث Δ ب ج کو اصلی مثلث کا متقابل یا متشاکل کہتے ہیں۔



۶۲۔ اب جس طرح سے کہ سطحی زاویوں (Δ ب ج) (Δ ب ج) کے اجزا جدا جدا مساوی ہیں لیکن یہ ایک

دوسرے پر منطبق نہیں ہو سکتے [دیکھو صفحہ (۵۱)] اسی طرح کردی مثلث Δ ب ج کے اضلاع اور زاوے اس کے متقابل Δ ب ج کے اضلاع اور زاویوں کے جدا گانہ مساوی ہیں لیکن اپنے رخوں کی انحصار کی وجہ سے مثلث بالعموم ایک دوسرے پر منطبق نہیں ہو سکتے۔

کیونکہ اگر ہم ہر مثلث کے محدب رخ کی طرف دیکھیں تو مثلث Δ ب ج کے رأسوں Δ ب Δ ج کا تواتر گھڑی کی سوئیوں کی سمت میں ہے لیکن ان کے متقابل رأسوں Δ ب Δ ج کا تواتر سوئیوں کی متقابل سمت میں ہے۔

اگر مثلث مستوی ہوں تو اس قسم کا اختلاف انطباق سے پہلے ایک مثلث کو الٹا دینے سے رفع ہو سکتا ہے، لیکن

کردی مثلثوں کو اس طرح لٹانے سے ان کے محذب رخ ایک دوسرے کے سامنے ہو جائینگے اور انطباق ناممکن ہوگا۔
نوٹ۔ ایک متساوی الساقین کردی مثلث اور اس کا مقابل ایک دوسرے پر منطبق ہو سکتے ہیں، کیونکہ فرض کردہ $\angle A$ و $\angle B$ اس لئے

$$\angle B = \angle C = \angle B = \angle C$$

پس اگر $\angle A$ کو $\angle B$ پر رکھا جائے تو $\angle B$ $\angle C$ پر منطبق کیا جاسکتا ہے اور $\angle C$ $\angle B$ پر۔

۴۳۔ اگرچہ کردی مثلث اور اس کا مقابل ایک دوسرے پر بالعموم منطبق نہیں ہو سکتے لیکن وہ رقبہ میں ہمیشہ مساوی ہوتے ہیں۔

کیونکہ اگر مثلث $\angle B$ $\angle C$ کو نہایت چھوٹے مثلثوں میں تقسیم کیا جائے تو ان میں سے ہر ایک کے مقابل کا چھوٹا مثلث، $\angle B$ $\angle C$ میں واقع ہوگا۔

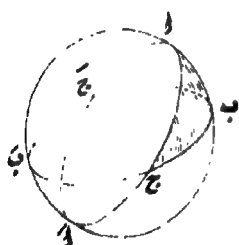
ان متقابل مثلثوں میں سے ہر ایک اگر کافی طور پر چھوٹا ہو تو مستوی خیال کیا جاسکتا ہے اس لئے یہ ایک دوسرے پر منطبق ہو سکتے ہیں۔ پس مثلث $\angle B$ $\angle C$ رقبہ کے ایسے اجزاء پر مشتمل ہے جن میں سے ہر ایک کا مساوی، مثلث $\angle B$ $\angle C$ میں موجود ہے۔

نوٹ۔ جس طرح ایک مستوی مثلث کے راسوں کو بیرونی دائرہ کے مرکز کے ساتھ ملانے سے اس مثلث کو تین متساوی الساقین

مثلثوں میں تقسیم کر سکتے ہیں، اسی طرح ایک کروی مثلث Δ ب ج کے رأسوں کو مستوی سطح Δ ب ج کے قطب کے ساتھ ملانے سے اس کو ہم قین متساوی الساقین کروی مثلثوں میں تقسیم کر سکتے ہیں۔ اب ہر مثلث متساوی الساقین کے مقابل ایک مساوی مثلث متساوی الساقین ہوتا ہے جو اس پر منطبق ہو سکتا ہے اور ایسے مقابل مل کر مثلث Δ ب ج کے مساوی ہیں جو Δ ب ج کا مقابل ہے۔

۶۴۔ کروی مثلث کا رقبہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ایک کروی مثلث Δ ب ج کبیر دائروں Δ ب ج، Δ ب ج، Δ ج ا ج کے تقاطع سے حاصل



ہوتا ہے جہاں نقطے Δ ب ج کے بالترتیب نقاط Δ ب ج کے متقابل ہیں اور اس کا رقبہ Δ سے بقبیر ہوتا ہے۔

اب زاویہ Δ والی ہلالی سطح

$$\Delta + \Delta = \Delta$$

$$\Delta + \Delta = \Delta$$

$$\Delta + \Delta = \Delta$$

(صفحہ ۶۴)

اس لئے جمع کرنے سے

پلائی سطح ۱ + پلائی سطح ب + پلائی سطح ج

$$\{\Delta_{1,1} + \Delta_{1,2} + \Delta_{1,3} + \Delta_{1,4}\} + \Delta_2 =$$

$$\Delta_2 + \text{ نصف کرہ کی سطح } = \{1 + b + c\} \frac{2\pi}{9}$$

$$2\pi + \Delta = (j+b+1) \frac{2\pi}{18}$$

$$(1) \dots\dots\dots \left\{ 180^\circ - \angle + \angle + 1 \right\} \frac{5\pi}{180} = \Delta$$

نوٹ۔ مثلث کا رقبہ لازماً ایک مثبت مقدار ہے اسلئے (۱) سے ظاہر ہے کہ $a + b + c$ ۱۸۰° سے بڑا ہے یعنی کردی مثلث کے زاویوں کا مجموعہ دو قائمہ کونوں سے زیادہ ہوتا ہے۔

زاویه ۱ + ب + ج - ۱۸۰°

کرومی اضافہ کہتے ہیں اور اس کو ض سے تعمیر کرتے ہیں، اسلئے

$$\Delta = \frac{r}{\rho} \times \text{ض}، \text{ اگر ض کو درجوں میں بنایا جائے}$$

یا $\Delta = r^2 \times \text{ض}$ ، اگر ض کو نیم قطری زاویوں میں ناپا جائے۔

متفرق مشقیں

(نوٹ۔ ذیل کی چند مثالوں میں دی گئی چار ہندسوں والے لوکار تئوں کے استعمال سے آسان ہو جاتا ہے)

۱۔ ایک مکعب اور ایک کرہ حجم میں باہم مساوی ہیں، بتاؤ کہ کرہ کے نصف قطر کو مکعب کے ایک ضلع کے ساتھ کیا نسبت ہوگی؟

۲۔ ایک مکعب کا قطر ۴۸.۵ سنتی میٹر ہے، اُس کرہ کا نصف قطر دریافت کرو جس کی سطح مکعب کی سطح کے برابر ہو۔

۳۔ ایک مخروط کے قاعدہ کا رقبہ ۹۷.۶ مربع سنتی میٹر ہے اور اس کی بلندی کی نسبت قاعدہ کے نصف قطر کے ساتھ ۶:۱۱ ہے مخروط کی سطح اور حجم دریافت کرو۔

۴۔ ایک قائم مخروط اور نصف کرہ کے کناروں کو جوڑنے سے ایک مجسمہ تیار کیا گیا ہے، نصف کرہ کا نصف قطر ۲ فٹ ہے اور مخروط کی بلندی ۴ فٹ ہے، مجسمہ مذکور کو پانی کے بھرے ہوئے ایک اسطوانہ کے اندر اس طرح سیدھا رکھا گیا ہے کہ نصف کرہ اسطوانہ کے پیندے کو مس کرتا ہے، اگر اسطوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہو اور بلندی ۶ فٹ تو قریب ترین مکعب فٹ تک اُس پانی کا حجم دریافت کرو جو اسطوانہ میں باقی رہ جاتا ہے۔

۵۔ ایک کرہ کا قطر ۴۳.۵ سنتی میٹر ہے اور اس کا حجم ایک ایسے مخروط کے حجم کا ۱۶.۵ گنا ہے جس کی بلندی ۷.۵ سنتی میٹر ہے۔ مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر قریب ترین ملی میٹر تک معلوم کرو۔

۶۔ ایک مثلث مخروط ناقص کی موٹائی ۱۵ سنتی میٹر ہے اور اس کے دونوں سرے بالترتیب ۴۰ سنتی میٹر اور ۲۴ سنتی میٹر کے اضلاع پر مرتبے ہیں۔ مجسم مذکور کی مائل سطح اور حجم دریافت کرو۔

۷۔ ایک مستطیل اسطوانہ کے اوپر ایک مخروط لگا کر ایک خیمہ تیار کیا گیا ہے، اس کی عمودی دیواروں کی بلندی ۳ و ۱۲۴ انچ ہے اور اس کے قاعدہ کا نصف قطر ۱۱۸ انچ ہے، نیز خیمہ کی کل بلندی مخروط کے راس تک ۹۰ و ۲۱۷ انچ ہے، بتاؤ کہ اس کے اندر کتنے مکعب فٹ ہوا ہے۔

۸۔ سیسہ کے ایک مخروط کی بلندی ۶ و ۲۴ سنتی میٹر ہے، مخروط کو کوٹ کر اس کا ایک ٹھوس کرہ بنایا گیا ہے جس کا قطر ۵ سنتی میٹر ہے، مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر قریب ترین ملی میٹر تک معلوم کرو۔

۹۔ ایک مساوی الاضلاع مثلث کو اس کے ایک ضلع کے گرد گھمانے سے ایک مجسم تیار کیا گیا ہے، اگر مثلث کے ایک ضلع کا طول ۴ و ۷ سنتی میٹر ہو تو مجسم کی سطح اور حجم دریافت کرو۔

۱۰۔ ایک کرہ ایک اسطوانہ کی شکل کا ہے اور اس کی چمکت نصف کروی گنبد ہے، اندر کی طرف سے کرہ کا قطر اتنا ہی ہے جتنا کہ فرش سے گنبد کے بالاترین نقطے کا ارتفاع ہے، اگر کرہ کے اندر ۲۳۶ مکعب فٹ ہوا ہو تو کرہ کی بلندی دریافت کرو۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ ایک کروی خول کا حجم اُس مخروط ناقص کے حجم کے مساوی ہوتا ہے جس کی بلندی خول کی موٹائی کا ۴ گنا ہو اور

جن کے مستوی سروں کے نصف قطر خول کے بیرونی اور اندرونی نصف قطروں کے مساوی ہوں۔

۱۲۔ اگر ایک مخروط کا حجم اور کل سطح بالترتیب ح اور س ہوں اور اندرونی دائرہ کی (یعنی اس دائرہ کی جو اس مخروط کے اندر بنایا جائے) سطح اور حجم بالترتیب ح' اور س' ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ح : ح' = س : س'$$

۱۳۔ ایک اسطوانہ کے دونوں سروں پر دو نصف کرے لگائے گئے ہیں جن کے قطر اسطوانہ کے قطر کے مساوی ہیں اور اسطوانہ کا طول اس کے قطر کے مساوی ہے، اگر اس مجسم کا حجم جو اس طح بنتا ہے ۴۴ مکعب سنتی میٹر ہو تو اس کی سطح دریافت کرو۔

۱۴۔ پانی ایک ایسے نل میں سے گزرے گا جس کا قطر ۳۰ سنتی میٹر ہے ایک حوض میں پڑ رہا ہے، اگر پانی کی رفتار فی ثانیہ ۱۰۲۵ میٹر ہو تو بتاؤ کہ ۲۴ گھنٹے میں کتنے ہزار میٹر پانی حوض میں پڑے گا۔

۱۵۔ اسطوانہ کی شکل کے ایک برتن کی گہرائی ۴۴ سنتی میٹر ہے اور اندر کی طرف سے اس کا قطر ۸ سنتی میٹر ہے، اس کو بھرنے کے لئے جب قدر پارہ درکار ہوگا اس کا وزن چار عددوں والی جدولوں کی مدد سے کلوگراموں میں معلوم کرو جبکہ پارہ کی کثافت اضافی ۱۳۵۶ ہو۔

۱۶۔ اگر ایک کرہ کے قطر کو ناپنے میں دونوں طرف اصلی قطر کا ایک فیصد غلطی واقع ہو تو بتاؤ کہ محسوبہ حجم اصلی حجم سے کتنے فیصد زیادہ ہوگا۔

۱۷۔ چار ہندسوں والی جدولوں کے ذریعہ جہاں تک ممکن ہو ٹھیک ٹھیک معلوم کرو کہ تاجے کے ۵۹۳ کلوگراموں سے ۴۴.۵ ملی میٹر قطر کا کتنے میٹر لمبا تار کھینچ سکتا ہے، جبکہ تاجے کی کثافت اضافی ۸۸۵۸۵ ہو۔

۱۸۔ چار ہندسوں والی جدولوں کے ذریعہ دریافت کرو کہ ۱۰۵۴ کلوگرام سیسہ سے ۲۵۶ ملی میٹر قطر کے تقریباً کتنے چھڑے بن سکتے ہیں۔ سیسہ کی کثافت اضافی ۱۱۳۵ ہے۔

۱۹۔ اگر ایک مخروط ناقص کی بلندی ۴ فٹ ہو اور اس کے دونوں سروں کے رقبے بالترتیب ۱ اور ۴ فٹ ہوں تو مخروط ناقص کا حجم ضابطہ

$$ح = \frac{\pi}{3} (1 + 4 + 16) (ب + ۱)$$

سے محسوب ہوتا ہے۔ اگر

ف = ۴۵۵ اینچ، ۱ = ۲۸۵۵ مربع اینچ، ب = ۷۸۵۶ مربع اینچ
تو حجم قریب ترین کعب اینچ تک معلوم کرو۔

یہ ضابطہ ذیل کی صورتوں میں کیا ہو جائے گا جب (۱) = ب

اور (۲) = ۱۔ ان دونوں صورتوں کی ہندسی تعبیر کیا ہوگی؟

۲۰۔ ایک انجن کے جوش دان میں ۳۵ نیلیاں ہیں جن میں سے ہر ایک کا قطر اندر کی طرف سے ۲۵۵ اینچ ہے اور ہر ایک کا طول ۸ فٹ ہے، گرم کرنے والی مجموعی سطح (یعنی اندر کی طرف سے نلیوں کی منحنی سطح) مربع فٹوں میں قریب ترین صحیح عدد تک معلوم کرو۔

۲۱۔ ایک قائم مستطیر مخروط کی پیمائش کرنے سے معلوم ہوا کہ اس کے قاعدہ کا قطر ۱۶۵۲ اور ۳۵۱ کے درمیان ہے اور اس کی بلندی ۵۱۵ اور ۴۷ کے درمیان ہے، اگر ۱۱ کی قیمت ۱۴۱۶/۳ لی جائے تو (۱) بڑے ابعاد کی بنا پر اور (۲) چھوٹے ابعاد کی بنا پر مخروط کا حجم محسوب کرو، اگر جواب اعشاریہ کے ساتھ ملحوظ ہندسوں تک نکالا جائے تو بتاؤ کہ ان میں سے کتنے عدد بیکار ہیں۔

۲۲۔ دھات کے ایک کعب کو جس کا ہر کنارہ ۴۷۵ سنتی میٹر ہے بٹکا کر ایک کرہ تیار کیا گیا ہے، چار ہندسوں والی جدولوں سے جہاں تک ممکن ہو سکے کرہ کا قطر صحیح صحیح محسوب کرو۔

۲۳۔ دو کروی کے وزن ۸ : ۱۱ کی نسبت میں ہیں اور ان کی اصنافی کثافتیں بالترتیب ۱۵۲۱ اور ۵۶۰۲ ہیں، اگر پہلے کرہ کا قطر ۵۷۵ سنتی میٹر ہو تو دوسرے کرہ کا قطر دریافت کرو۔

۲۴۔ ایک قائم مستطیر مخروط کو قاعدہ کے متوازی دو مستوی سطحیں کاٹتی ہیں اور اس کے ارتفاع کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کرتی ہیں، ان ٹکڑوں کے حجموں کا مقابلہ کرو۔

۲۵۔ اگر زمین کو ۹۲۶ میل قطر کا ایک کرہ تسلیم کیا جائے تو چار ہندسوں والی جدولوں سے خطِ بادہ شمالی (عرض بلد ۳۳°۹۶) کا طول جہاں تک ممکن ہو صحیح صحیح دریافت کرو۔

سینڈ آس منعلقہ کا رقبہ دریافت کرو جو عرض بلد ۹۰ اور عرض بلد ۹۰ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۲۶ - ایک کرہ کا قطر ۳۷۲، ۳۷۲ پانچ ہے چار ہندسوں والی جدولوں میں پچیسے بڑے مکعب کا حجم جہاں تک ممکن ہو صحیح صحیح محسوب کرو جو اس میں سے کاٹا جاسکتا ہے۔

۲۷ - ایک مکعب حوض جس کا ہر کنارہ اندر کی طرف سے ۶ فٹ ہے پانی سے بھرا ہوا ہے اس پانی کے حجم کا ۵.۳ حصہ ہر روز تبخیر سے ضائع ہو جاتا ہے۔ اگر یہ تسلیم کر لیا جائے کہ پانی کی کمی صرف تبخیر کی وجہ سے ہوتی ہے تو بتاؤ کہ ۱۰ دن کے بعد کتنے ادس پانی حوض میں رہ جائے گا۔

۲۸ - سیہ کے ایک منتظم ذوار بعتہ الطوح کا وزن ۱۰۵۷۰ کلو گرام ہے اور سیسے کی کثافت اضافی ۳۵، ۱۱ ہے، چار ہندسوں والی جدولوں سے اس کے کنارہ کا طول جہاں تک ممکن ہو سکے صحیح صحیح معلوم کرو۔

۲۹ - ذیل کے گردشیں مجسموں کو اسطوانوں، مخروطوں یا ناقص مخروطوں کا مجموعہ یا فرق سمجھ کر ان میں سے ہر ایک کا حجم دریافت کرو۔ وہ مجسم جس کی تکوین (۱) ایک متساوی الاضلاع مثلث (ضلع = ل) کو اس کے ایک ضلع کے گرد گھمانے سے ہوتی ہے۔

(۲) ایک متساوی الاضلاع مثلث (ضلع = ل) کو ایک ایسے خط کے گرد گھمانے سے ہوتی ہے جو اس کے رأس میں سے قاعدہ کے متوازی کھینچا جائے۔

(۳) ایک مربع (ضلع = ل) کو ایک ایسے خط کے گرد گھمانے سے ہوتی ہے جو مربع کے ایک کونہ میں سے گزرے اور اسکے ایک قطر

کے متوازی ہو۔

(۴) ایک منظم سدس (ضلع = ۱) کو ایک ضلع کے گرد

گھمانے سے جوتی ہے۔

ثابت کرو کہ ہر صورت میں حجم اُس منشور کے حجم کے مساوی ہے جسکا قاعدہ گردش کرنوالی شکل ہو اور جس کی بلند می اُس دائرہ کا محیط ہو جسکی گردش کرنوالی شکل کا ہندسی مرکز مرسم کرتا ہے۔

۳۔ مندرجہ بالا مشق کے آخر میں جو اصول درج ہے اس کو تسلیم کر کے ایک مجسم طلقے کا وزن دریافت کرو جو پتہ ۱۱ نصف قطر کے دائرہ کو ایک ایسے خط کے گرد گھمائے سے حاصل ہو جسکا فاصلہ دائرہ کے مرکز سے ۱۱ پتہ ہے۔

۱۱

عددی مشقوں کے جوابات

[ترسیعی عمل میں انتہا درجہ کی احتیاط سے بھی کلیتہً درست نتائج حاصل نہیں ہو سکتے۔ ایسی صورتوں میں جوابات محض تقریبی ہوتے ہیں جو جوابات ذیل میں مندرج ہیں وہ نظری طریق پر محسوب کئے گئے ہیں، لہذا ان کو معیار سمجھ کر طالب علم اپنے نقشہ اور پیمائش کی صحت جانچ لے، اگر مندرجہ ذیل جوابات کے لحاظ سے غلطی ایک فیصد کے اندر ہو تو طالب علم اپنے جوابات کو تسلی بخش سمجھے۔]

مشقیں صفحہ (۱۳)

۴۔ ۷۰۔ سنتی میٹر ۵۔ ۳۰۰ انچ ۲۵۵ انچ

۶۔ (۲) ۴۲۵۴ سنتی میٹر (۳) ۵۶۵۶ سنتی میٹر

مشقیں صفحہ (۲۳)

۲۔ ۵۰۔ انچ ۴۔ ۳۲۴

مشقیں صفحہ (۲۶)

۴۔ ۱۰۵۴ سنتی میٹر ۵۔ ۳۵۵ سنتی میٹر ۱۰۵۲ سنتی میٹر

۵۳۸۵ ، ۵۳۳۹

مشقیں صفحہ (۴۷)

۴۔ (۱) ۵۸۰۰۰

(۲) ۵۸۵۷۱

۵۔ ۵۲۸۰۰۰

مشقیں صفحہ (۶۲)

۲ - ۳، ۴، ۵ - ۳ - ۱۳

مشقیں صفحہ (۶۳)

۱ - ۷۲ مربع فٹ ۲ - ۷۱ سنتی میٹر $\frac{15}{12}$ ۳ - ۷۸ مربع سنتی میٹر

۴ - ۱۰ سنتی میٹر ۵ - ۵۵ مربع سنتی میٹر

مشقیں صفحہ (۶۸)

۱ - ۷۵۰ ۲۵۰ میٹر ۲ - ۷۵۰ لیٹر ۵۲۰ کلوگرام ۳ - ۷۵ لاکھ

مشقیں صفحہ (۸۰)

۱ - ۱۹۶۵۳ ۲ - ۲۰۳۰۰ کلوگرام

۳ - ۷۴۸۸ کلوگرام ۴ - ۵۴۲۵

۵ - ۸ شنگ ۴ پنس ۶ - ۲۱۵۴۲ کلوگرام

۷ - ۵ شنگ ۱۱ پنس ۸ - ۷۵ سنتی میٹر ۹ - ۷۵ سنتی میٹر

۱۰ - ۱۲ سنتی میٹر ۱۵ سنتی میٹر ۱۸ سنتی میٹر

۱۱ - ۷۱ سنتی میٹر ۶ سنتی میٹر ۵ سنتی میٹر

۱۲ - ۵۷۸ سنتی میٹر ۲۰۰ مربع سنتی میٹر ۱۹۲۵۴ مکعب سنتی میٹر

۱۳ - ۱۲ سنتی میٹر ۴ سنتی میٹر ۱۴ - ۲۹ سنتی میٹر

۱۵ - ۱۴۲۴ لیٹر ۱۶ - ۲۰ مکعب سنتی میٹر ۲۸۰ مربع سنتی میٹر

۱۷ - ۳۶۰ مکعب سنتی میٹر ۴۳۲ مربع سنتی میٹر

۱۸ - ۱۲۰۰۰ مکعب سنتی میٹر ۱۹ - ۴۶۴ مکعب فٹ

۲۰ - ۳۷۵۰۰ گیلن ۱۶۷ ٹن ۲۱ - ۲۳۶۶۱

۲۲ - ۷۵ گھنٹے $\frac{1}{4}$ منٹ

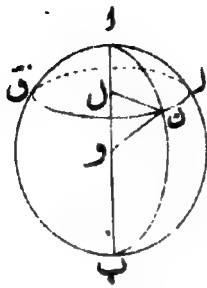
کہ اس کی گہرائی بقدر ۶۱۰ سمر کے کم ہو جائے تو قریب ترین مربع ملی میٹر تک ظرف کی اس سطح کا رقبہ دریافت کرد جو پانی کے ہٹ جانے سے خالی ہو گئی ہے۔

۹۔ ایک مخروطی ظرف دوسرے مخروطی ظرف کے اندر اس طرح رکھا گیا ہے کہ ان کے راس اور محور مشترک ہیں، مشترک راس نیچے کی طرف ہے اور مشترک محور افقی پر عمود ہے۔ اندرونی ظرف کو تیل سے ادر بیرونی ظرف کے باقی حصہ کو پانی سے ایک ہی ارتفاع تک بھر دیا گیا ہے۔ اگر تیل اور پانی کی سطحوں کے قطر بالترتیب ۶۱۰ سمر اور ۱۱۱۷ سمر ہوں تو تیل اور پانی کے وزنون کی باہمی نسبت دریافت کرد جبکہ تیل کی کثافت اضافی ۱۰۹۷ ہو۔

۱۰۔ ایک ٹھوس اسطوانہ کا طول ۱۰ سمر اور قطرہ سمر ہے، اس کے اندر ہر سرے پر ایک مخروطی جوت بنایا گیا ہے جس کا قطر ۶ سمر ہے اور ارتفاع ۴ سمر، باقی مجسم کی کل سطح قریب ترین مربع سنتی میٹر تک دریافت کرد۔

کرہ

۳۶۔ تعریف۔ کرہ وہ مجسم ہے جو نصف دائرہ کو اس کے قطر کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتا ہے جبکہ قطر کو بطور محور ثابت کر دیا جائے۔



مثلاً اگر نصف دائرہ $ا ب$ کو قطر $ا ب$ کے گرد گھمائیں تو نصف محیط $ا ب$ ایک کرہ کی سطح مرتسم کرے گا۔

نیز جب نصف محیط قطر کے گرد گھومتا ہے تو محیط پر کا ہر نقطہ مرکز سے مستقل فاصلہ پر رہتا ہے

اس لئے معلوم ہوا کہ ایک ایسے نقطہ کا طریق یا مکان جو فضا میں حرکت کرتا ہے اور اثناے حرکت میں ایک ثابت نقطہ سے مستقل فاصلہ پر رہتا ہے ایک کرہ کی سطح ہے۔

ثابت نقطہ کو کرہ کا مرکز اور مستقل فاصلہ کو نصف قطر کہتے ہیں، قطر وہ خط مستقیم ہے جو مرکز میں سے گذرتا ہے اور دونوں طرف کرہ کی سطح پر ختم ہوتا ہے، پس سب قطر ایک دوسرے کے مساوی ہوتے۔

۳۷۔ کرہ کی ہر مستوی تراش دائرہ ہوتی ہے۔

شکل بالا میں فرض کرو کہ ایک سطح مستوی $ق ن ل$ کرہ کو کاٹتی ہے، اور کرہ کا مرکز $و$ ہے اور نصف قطر $ل$ ۔ نیز فرض کرو کہ خط تراش پر کوئی نقطہ $ن$ ہے۔

کاٹنے والی سطح پر عمود $و ل$ ککالو اور فرض کرو کہ اس کا طول $ط$ ہے، $و ن$ ، $ن ل$ کو ملاؤ

اب چونکہ مستوی $ق ن ل$ میں $و ل$ ، $ل ن$ پر عمود ہے

ن ن ل = د ن - د ل

ر = ط - ط

ن ل = ر - ط = مستقل مقدار

اس لئے ن کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز ایک ثابت نقطہ ل ہے

تعریف قطر لوب کو جو مستوی تراش ق ن ل پر عمود ہے تراشش کا محور کہتے ہیں اور اس کے سرے لوب تراش کے قطب کہلاتے ہیں۔

۳۸۔ اگر مستوی تراش کرہ کے

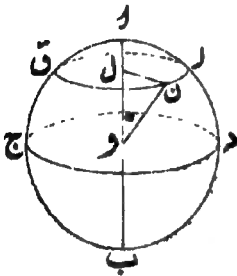
مرکز میں سے گزرے تو ل مرکز

د پر منطبق ہو گا اور اس محور

میں دائرہ ق ن ل کا نصف

قطر بڑے سے بڑا ہو گا یعنی کرہ

کے نصف قطر کے مساوی ہو گا۔



جس خط پر مرکز میں سے گزرنے والی مستوی تراش

کرہ کو کاٹتی ہے اس کو دائرہ بکیر کہتے ہیں، باقی سب

مستوی تراشیں ضعیف دائرے کہلاتی ہیں۔

۳۹۔ ایک کرہ کا نصف قطر ل ہے، اگر اس کی ایک

مستوی تراش کا نصف قطر ل ہو اور اس تراش کا فاصلہ

مرکز سے ط ہو تو یہ ثابت ہو چکا ہے کہ

ل = ر - ط

پس اگر یہ مستوی تراش مرکز و سے باہر کی طرف اپنے
متوازی حرکت کرے تو ط کے بڑھنے سے لہ گھٹیکا پس
اگر ایک کرہ کی مستوی تراش کا فاصلہ مرکز سے بڑھتا جائے
تو اس تراش کا نصف قطر بتدیج گشتا جائے گا اور
بالآخر جب ل نقطہ ل پر منطبق ہوگا، تو ل معدوم
ہو جائے گا یعنی اس وقت مستوی سطح کرہ کو صرف ایک
نقطہ ل پر قطع کرے گی، اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں
کہ مستوی سطح اس حالت میں نقطہ ل پر کرہ کی مماسی سطح
ہے، پس معلوم ہوا کہ کرہ کی سطح کے کسی نقطہ پر صرف
ایک مماسی سطح ہو سکتی ہے اور یہ وہ مستوی سطح
ہوتی ہے جو نقطہ مذکور میں سے گزرنے والے نصف
قطر پر عمود ہو۔

۴۰۔ اگر مماسی سطح میں اس کے نقطہ تماس میں سے ایک
ستقیم خط کھینچا جائے تو وہ کرہ کی سطح کو صرف ایک
نقطہ پر ملیگا، اس کو یوں بیان کرتے ہیں کہ یہ خط کرہ
کو اس نقطہ پر مس کرتا ہے، پس کرہ کے کسی نقطہ
پر بے شمار مماسی خط کھینچے جاسکتے ہیں اور ان میں
سے ہر ایک اس نقطہ میں سے گزرنے والے نصف
قطر پر عمود ہوتا ہے۔ پس اگر ایک مماسی خط کو اس کے
نقطہ تماس میں سے گزرنے والے نصف قطر کے گرد
گھمایا جائے تو ظاہر ہے کہ اس کے گھومنے سے مماسی سطح

پیدا ہوگی۔

۴۱۔ اگر Δ ب ایک کرہ کا قطر ہو تو ایسا دائرہ کبیر صرف ایک ہو سکتا ہے جس کا محور Δ ب ہو اور ایسے کبیر دائرے بیشمار ہو سکتے ہیں جو قطبین Δ اور ب میں سے گزریں۔
 ۴۲۔ کرہ پر کے دو مفروضہ نقطوں میں سے (جو ایک قطر کے سرے نہ ہوں) ایک اور صرف ایک کبیر دائرہ کھینچ سکتا ہے کیونکہ دائرہ کے مرکز اور ان دو نقطوں میں سے گزرنے والی مستوی سطح صرف ایک ہو سکتی ہے جو کرہ کو ایک کبیر دائرہ پر کاٹے۔

نوٹ۔ کرہ کی سطح پر کے دو نقطوں میں سے جو کبیر دائرہ گزرتا ہے اس کی چھوٹی قوس کو ان نقطوں کا کروی فاصلہ کہتے ہیں، یہ آگے (صفحہ ۱۵۵ پر) ثابت کیا جائے گا کہ یہ قوس چھوٹے سے چھوٹا خطا ہے جو ان نقطوں کے درمیان کرہ کی سطح پر کھینچا جاسکتا ہے۔ اب چونکہ کرہ کے سب کبیر دائرے مساوی ہوتے ہیں اس لئے کسی کبیر دائرہ کی ایک قوس اس زاویہ سے تعبیر ہو سکتی ہے۔ جو قوس مذکور کے محاذی مرکز پر بنتا ہے [مسئلہ اثباتی ۶۹، اسکول جو میتھی]

پس شکل دفعہ ۳۸ میں Δ ب ق اور ج کا کروی فاصلہ زاویہ Δ ب ق و ج سے تعبیر ہوتا ہے اور درجوں میں ناپا جاسکتا ہے کبیر دائرہ ج د پر کے کسی نقطہ کا کروی فاصلہ قطب Δ سے ۹۰ ہے۔

۴۴۔ کرہ کی سطح پر کے کسی تین نقطوں میں سے صرف ایک دائرہ (مفروضہ نہیں کہ یہ کبیر ہو) کرہ کی سطح پر کھینچ سکتا ہے کیونکہ ان تین نقطوں سے صرف ایک مستوی سطح کا تعین ہوگا جو کرہ کو ان نقطوں میں سے گزرنے والے ایک دائرہ پر کاٹے گی۔

۴۴۔ دو نقاط مفروضہ میں سے لا انتہا کرے گزرنے کے ہیں اور ان سب کے مرکز ایک ثابت مستوی سطح پر واقع ہوتے ہیں۔

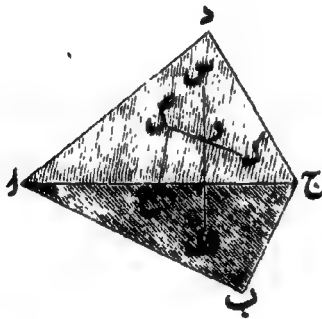
اگر قی اور ر مفروضہ نقطے ہوں تو ظاہر ہے کہ وہ سب نقطے جوقی اور ر سے متساوی الفاصل ہوں ایک مستوی سطح پر واقع ہوں گے جو مستقیم خط قی کی زاویہ قائمہ پر تنصیف کرے گی۔ اس لئے اس سطح پر کے کسی نقطہ کو مرکز مان کر ایک کرہ کھینچ سکتا ہے جوقی اور ر میں سے گزرے۔

۴۵۔ تین نقاط مفروضہ میں سے لا انتہا کرے گزرتے ہیں اور ان کے مرکز ایک ثابت مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں۔

شکل دفعہ ۳۸ میں فرض کرو کہ تین نقطے ن، ق، ر ہیں اور ان میں سے گزرنے والے دائرہ کا مرکز ل ہے، فرض کرو کہ خط اب نقطہ ل میں سے گذرتا ہے اور ن، ق، ر کی سطح مستوی پر عمود ہے۔ اب اگر اب پر کوئی

نقطہ دلیا جائے تو یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ مثلث ونل، وقل، وریل ہر طرح سے ایک دوسرے کے برابر ہیں، اسلئے ون = وقل = وریل پس اب پر کے کسی نقطہ کو مرکز مان کر ایک کرہ ن، ق، ل میں سے کھینچ سکتا ہے، دوسرے الفاظ میں نقاط ن، ق، ل میں سے بیشمار کرے کھینچ سکتے ہیں اور ان کے مرکزوں کا طریق ایک مستقیم خط اب ہے جو مثلث ن ق ل کی سطح پر عمود ہے اور اس مثلث کے بیرونی دائرہ کے مرکز میں سے گذرتا ہے۔

۴۶۔ ایسے چار نقطوں میں سے جو ایک ہی مستوی سطح پر واقع نہ ہوں صرف ایک کرہ گذر سکتا ہے۔



فرض کرو کہ چار نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ایک ہی سطح پر واقع نہیں ہوتے اور مثلث 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' کے بیرونی دائروں کے مرکز 'ف'، 'گ' ہیں۔

فرض کرو کہ نقاط اور گ سے مستویات ا ب ج اور د ج پر بالترتیب عمود ف س اور گ ک نکالے گئے ہیں۔

تب ف س پر کا ہر نقطہ ل' ب ج سے مساوی الفصل ہے، اور گ ک پر کا ہر نقطہ ل' د ج سے مساوی فاصلہ پر ہے، اس لئے خطوط ف س اور گ ک میں سے ہر ایک کا ہر نقطہ ل' اور ج سے مساوی فاصلہ پر ہے لیکن وہ سب نقطے جو ل' اور ج سے مساوی الفصل ہیں ایک مستوی سطح پر واقع ہوتے ہیں جو ا ب ج کی زاویہ قائمہ پر تنصیف کرتی ہے۔

اس لئے ف س اور گ ک دونوں اس مستوی میں واقع ہوتے ہیں اور چونکہ وہ متوازی نہیں ہو سکتے (کیونکہ وہ دو متقاطع سطوح مستویہ پر جدا گانہ عمود ہیں) اس لئے وہ لازماً ایک دوسرے سے کسی نقطہ و پر ملینگے۔

پس ف س اور گ ک کا ایک ہی مشترک نقطہ و نقاط ل' ب ج، د چاروں سے مساوی فاصلہ پر ہو گا۔ پس اگر و کو مرکز اور و ل' کو نصف قطر مان کر ایک کرہ کھینچا جائے تو وہ ل' ب ج، د میں سے گزریگا اور یہ ایک ہی کرہ ہے جو ان چار نقطوں میں سے گزر سکتا ہے۔

(۲) ۲۰۴ مربع سنتی میٹر، ۴۵۸ مکعب سنتی میٹر

۲ - ۵۲۸ مربع سنتی میٹر

۳ - ۱۲۲ مکعب سنتی میٹر

۴ - ۱۲۳ مربع سنتی میٹر ۵ - ۵۲۸ مربع سنتی میٹر

۶ - ۱۰۶۲۰ میٹر ۷ - ۵۰۰۶ انچ

۸ - ۵۰۰۰ مکعب سنتی میٹر ۱۵۹۱ سنتی میٹر

۹ - ۷ مکعب فٹ ۱۰ - ۸۸۵۱ کلوگرام

۱۱ - ۱۸۵۸۵ میٹر ۵۲۵۶۹ گرام

مشقیں صفحہ (۱۱۹)

۲ - (۱) ۱۸۸ مربع سنتی میٹر، ۳۰۲ مکعب سنتی میٹر

(۲) ۱۴ مربع سنتی میٹر، ۵ مکعب سنتی میٹر

۳ - ۱۴۱۴ مربع سنتی میٹر ۴ - ۲۷ مکعب سنتی میٹر

مشقیں صفحہ (۱۲۵)

۱ - ۸۱۶ مربع سنتی میٹر ۲ - ۱۱۰ مربع سنتی میٹر

۳ - ۱۴۸ مکعب سنتی میٹر ۴ - ۷۹ مربع سنتی میٹر، ۸۸ مکعب سنتی میٹر

۵ - ۱۲۲۶۲ مربع سنتی میٹر ۶ - ۱۴۰ مکعب سنتی میٹر

۹ - $\frac{۳(۱-۱۰)}{۳}$ ۱۰ - ۱۰ سنتی میٹر، ۵ سنتی میٹر

مشقیں صفحہ (۱۲۷)

۱ - ۲۰ مکعب سنتی میٹر ۲ - ۲۶۸ گز ۱ فٹ

۳ - ۵۶۴ میٹر ۴ - ۱۰۱۷ مربع سنتی میٹر

- ۵- ۵۱ منٹ ۱۲ سکنڈ ۴- ۲:۱
 ۷- ۱۸ مربع سنتی میٹر ۸- ۳۷۶۹۹۹ مربع سنتی میٹر
 ۹- ۳۹:۲۳ ۱۰- ۳۹۰ مربع سنتی میٹر

مشقیں صفحہ (۱۳۵)

- ۱- (۱) ۷۲ مربع سنتی میٹر، ۵۸ مکعب سنتی میٹر
 (۲) ۱۳۸۵ مربع سنتی میٹر، ۱۸۲۹ مکعب سنتی میٹر
 ۲- ۱۴ پونڈ ۱۹ شلنگ ۴ پنس ۳- ۰.۵۷ سنتی میٹر
 ۴- ۱۵ ۵- ۳۸۱ مکعب سنتی میٹر
 ۶- ۲۸۹ مکعب سنتی میٹر ۷- ۱ سنتی میٹر
 ۸- ۴۱۸ مربع سنتی میٹر، ۱۵۶۹۴ کلوگرام
 ۹- ۶۶۷ مکعب سنتی میٹر ۱۰- ۴۵۲ سنتی میٹر
 ۱۱- ۱ اینچ ۱۲- ۱ سنتی میٹر
 ۱۳- ۱۷:۸ ۱۴- ۱۵۲ کلوگرام
 ۱۵- ۵۵۶۵۴ کلوگرام ۱۶- ۲۴۳۰۰ میٹر، ۱۰۵۸ فیصد
 ۱۷- ۱۹۲۲۵۶۶ مربع سنتی میٹر، ۷۱۲۵۱۵ مکعب سنتی میٹر
 ۱۸- ۴۳۹۵۸۲ مربع سنتی میٹر، ۳۱۸۵۳۵ مکعب سنتی میٹر
 ۱۹- ۵۷۱۷۷۷ مربع سنتی میٹر
 ۲۰- ۶۱۱۵۳ مربع فٹ ۲۱- ۴۲ فٹ

مشقیں صفحہ (۱۵۱)

- ۲- (۱) ۲۴۸۸۰ میل (۲) ۱۵۱۵۲ میل
 (۳) ۱۴۲۷۰ میل (۴) ۶۴۵ میل

۵۔ ۱۹۷۱..... مرچ میل (۲) ۸۱۷۲۰۰۰ مرچ میل

(۳) ۷۸۵۹۰۰۰۰ مربع میل

مشقیں صفحہ (۱۴۰)

۱- ۳۱: ۵۰ - ۲- ۲۳ سفتی میتر

۳۲ - ۲۰۴ مربع سنتی میتر، ۳۳۳ کعب سنتی میتر

۴- ۱۳۶ مکعب فٹ ۵- ۶۳۶ سطحی میٹر

۶- ۲۸.۳ مربع سنتی میتر، ۱۵۶۸۰ مکعب سنتی میتر

۷ - ۳۹۳۷ مکعب فٹ ۸ - ۸۵۳ سطحی میٹر

۹- ۲۹۸ مربع سنتی میتر، ۳۱۸ مکعب سنتی میتر

۱۰۔ ۲۰ فٹ ۱۳۔ ۳۱.۵ مربع سنٹی میٹر

۱۴- ۷۹۳۲۰۰۰ - ۱۵- ۴۳۵۷۵ کلوگرام

۱۶- ۳۰ فیصد تقریباً ۱۷- ۵۳۱۵۰۰ میٹر

۱۸- ۱۰۰۰۰۰
۱۹- ۲۳۲ مکعب انچ

۲۰۔ ۱۸۳۳ مربع فٹ

۲۱ - ۱۸۸۹ مکتب انج ، ۱۹۲۰ مکتب انج

مطبیات سے صرف ہم ملووظ ہندسوں تک درست جواب حاصل ہو سکتا ہے،

۲۲- ۴۵:۱۶ سنٹی میٹر ۲۳- ۷۷:۷ سنٹی میٹر ۲۴- ۱:۷:۱۹

۲۵- ۹۹۲۴ میل، ... ۳۹۷۴ مرجع میل

۲۶-۱۰۲۵۰ کتب ایچ ۲۷-۱۲۳۷۰۰ اونس ۲۸-۲۰۶۰۰ مفتی میر

$$r_1 n \frac{q}{r}(r), r_2 n \frac{q}{r}(r), r_3 n \frac{q}{r}(r), \frac{q^2}{r} n(r) = 49$$

۴۵- ۱۶ و ۳۳۴ مکتب انج

فہرست اصطلاحات



1. Axioms

علوم متعارفہ

2. Concurrent

متراکز

3. Concurrence

تراکز

4. Collinear points

سامت نقطہ

5. Corollary

نتیجہ صریح - فرع

6. Correspondence

تناظر

7. Corresponding

تناظر

8. Co-planer

ہم سطح

9. Dihedral angle

دو سطحی زاویہ

10. Edge

کنارہ

11. Face

رخ

12. Frustrum (of a cone)

مخروط ناقص

13. Generation

تكوين

14. Great circle
15. Hypothetical construction
16. Icosa hedron
17. Latitude
18. Longitude
19. Lune
20. Octahedron
21. Parallels
22. Parallelepiped
23. Plane
24. Polyhedron
25. Pyramid (right; Oblique)
26. Prism
27. Prismoid
28. Side-face
29. Skew
30. Sense
31. Solid
32. Solids of Revolution
33. Solid angle
34. Solid geometry

- کبریا و کبریا
عمل مفروضہ
بست سطحی (میں سطحی)
عرض بلد
طول بلد
بلالی سطح - چھانک کی منحنی سطح
ہشت سطحی
متوازیات
متوازی السطوح
سطح مستوی (مستوی)
کثیر السطوح
مخروط مضلع (قائم نازل)
منشور
منشورنا
طرفی رخ یا پہلو
معوج یا کانا
رُخ
مجسمہ
گردشی مجہبات
مجسمہ زاویہ
ہندسہ مجہبات

35. Spherical triangle

کروی مثلث

36. Superposition

انطباق

37. Trihedral angle

سہ سطحی زاویہ

38. Tetrahedron

ذو الاربعۃ السطوح (چهار سطحی)

39. Volume

حجم

40. Wedge

فانہ

41. Zone

منطقہ



DUE DATE

Rare

Cl. No. 513.3

Acc. No. 4305

16850.6

Late Fine Ordinary books 25 p. per day, Text Book

Re 1 per day, Over night book Re 1 per day.

--	--	--	--

